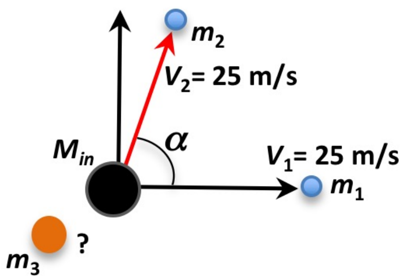
PROVA PARZIALE DEL 9 FEBBRAIO 2017
modulo I

February 18, 2017

Si prega di svolgere nella maniera più chiara possibile il compito, di scrivere e risolvere le equazioni in gioco riportando tutti i passaggi e corredandoli di commenti. Riportare solo la formula finale o il risultato numerico corretto non verranno considerati sufficienti.

PROBLEMA 1)
Due blocchi sono collegati tra loro tramite una fune passante per una puleggia priva di massa e di attrito. Il primo blocco, di massa $m_1 = 3.5$ kg, è appoggiato su un piano inclinato di 30 gradi rispetto all'asse x, mentre l'altro, di massa $m_2 = 2$ kg, è sospeso in verticale. Quanto vale l'accelerazione di ciascun blocco? Com'è diretta l'accelerazione di m_1? Quanto vale la tensione della fune?

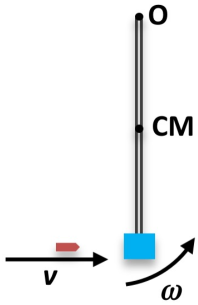
PROBLEMA 2)
Una granata esplode rompendosi in tre pezzi. Due di questi hanno uguale



massa, mentre il terzo ha massa tripla. Dopo l'esplosione, i due pezzi di ugual massa partono entrambi a una velocità di 25 m/s, uno lungo l'asse orizzontale, nel verso crescente dell'asse delle x, e l'altro ad un angolo $\alpha = 80$ gradi rispetto all'asse delle x (si veda la figura). Quanto valgono il modulo e la direzione della velocità del terzo frammento rispetto all'asse x?

PROBLEMA 3)
Un'asta rigida e uniforme, lunga $L = 0.5$ m, è fissata ad un'estremità al

perno O in figura, attorno al quale è libera di ruotare. Un blocco di massa 1 kg è agganciato all'altra estremità dell'asta. Un proiettile di massa 2 grammi viene sparato contro il blocco, nel quale si conficca. Dopo l'urto, il sistema composto da asta+blocco+proiettile inizia a ruotare intorno al perno O con una velocità angolare di 5 rad/s. Sapendo che il momento d'inerzia della sbarra rispetto a un asse passante per il suo centro di massa è pari a $I_{\rm CM} = (M \cdot L^2)/12 = 0.05$ kg $\cdot$ m^2, si calcoli quanto vale il momento d'inerzia del sistema rispetto al perno O. Quanto valeva la velocità del proiettile prima dell'urto?



QUESITI

1) Si enunci la seconda legge di Newton utilizzando l'espressione che coinvolge la quantità di moto. Come diventa la seconda legge di Newton nel caso in cui, anzichè avere un moto di traslazione, si ha un moto di pura rotazione? In che sistemi di riferimento valgono le due leggi?

2) A che tipo di moto è sottoposto un bambino fermo su una giostra che ruota a velocità angolare costante rispetto a un asse passante per il suo centro? Quanto vale la velocità tangenziale del bambino? Quanto varrebbe tale velocità se il bambino si trovasse in prossimità dell'asse di rotazione?

3) Si definisca la pressione di un fluido. Si tratta di una grandezza scalare o vettoriale? Quali sono le sue unità di misura nel sistema internazionale? Come varia la pressione con la profondità? E con l'altitudine? Si giustifichino le risposte enunciando le corrispondenti leggi fisiche.

SOLUZIONI DEI PROBLEMI

1) Dato che i due blocchi sono collegati tra loro tramite una fune, essi avranno la stessa accelerazione. Applicando il diagramma delle forze a ciascun blocco si ottiene il seguente sistema:

$$m_1 a = T - m_1 g \cdot \sin\theta \quad (1)$$

$$m_2 a = m_2 g - T, \quad (2)$$

dove T è la tensione della fune. Sommando membro a membro, si ricava:

$$(m_1 + m_2)a = m_2 g - m_1 g \cdot \sin\theta \quad (3)$$

$$(4)$$

da cui

$$a = \frac{g(m_2 - m_1 \cdot \sin\theta)}{(m_1 + m_2)} = \frac{9.8(2 - 3.5 \cdot 0.5)}{3.5 + 2}\mathrm{m/s^2} = 0.45\mathrm{m/s^2}. \quad (5)$$

$$(6)$$

Il fatto che l'accelerazione abbia segno positivo significa che il blocco 1 sale lungo il piano inclinato, mentre il blocco 2 scende verticalmente verso il basso. Sostituendo il valore di a nell'equazione (1) si ricava che:

$$T = m_1(a + g \cdot \sin\theta) = 3.5 \cdot (0.45 + 9.8 \cdot 0.5)\mathrm{N} = 18.73\mathrm{N}. \quad (7)$$

2) Dopo l'esplosione della granata, inizialmente ferma, l'unica quantità che si conserva, essendo il sistema isolato, è la quantità di moto. Dato che tale grandezza è di tipo vettoriale e il moto dei frammenti avviene nel piano, la legge di conservazione della quantità di moto va scritta per ognuno dei due assi coinvolti, cioè x e y:

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos\alpha + m_3 v_{3x} \quad (8)$$

$$0 = m_2 v_2 \sin\alpha + m_3 v_{3y}. \quad (9)$$

Risolvendo il sistema per v_{3x} e v_{3y} e ponendo $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = 3m$ e $v_1 = v_2 = v$ si ottiene che:

$$v_{3x} = -v(1 + \cos\alpha)/3 = -25 \cdot (1 + \cos 80)/3\mathrm{m/s} = -9.78\mathrm{m/s} \quad (10)$$

$$v_{3y} = -(v \cdot \sin\alpha)/3 = -(25 \cdot \sin 80)/3\mathrm{m/s} = -8.21\mathrm{m/s} \quad (11)$$

Entrambe le componenti di $\mathbf{v_3}$ hanno segno negativo, per cui giacciono nel terzo quadrante del piano cartesiano. Il modulo della velocità del terzo frammento è dunque calcolabile applicando il teorema di Pitagora:

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2} = \sqrt{(9.78)^2 + (8.21)^2} = 12.77\mathrm{m/s}. \quad (12)$$

La direzione che tale velocità possiede rispetto all'asse x è di nuovo calcolabile a partire dalle sue componenti come:

$$\beta = \arctan(v_{3y}/v_{3x}) = \arctan\left(\frac{-8.21}{-9.78}\right)\mathrm{gradi} = 40\mathrm{gradi}. \quad (13)$$

Si noti che in base a questo valore la velocità non giace nel terzo quadrante, bensì nel primo. Affinchè giaccia nel terzo, occorre sommare al valore ottenuto 180 gradi, per cui $\beta = 40$ gradi + 180 gradi = 220 gradi.

3) Per prima cosa occorre calcolare il momento d'inerzia della sbarra rispetto al perno O. Per fare ciò basta applicare il teorema degli assi paralleli:

$$I_O = I_{\mathrm{CM}} + M \cdot (L/2)^2 = \frac{1}{12} \cdot ML^2 + \frac{1}{4} \cdot ML^2 = \frac{1}{3} \cdot ML^2. \quad (14)$$

Dal valore del momento d'inerzia è possibile calcolare la massa M, altrimenti ignota. Pertanto

$$M = \frac{12 I_{\mathrm{CM}}}{L^2} = \frac{12 \cdot 0.05}{0.5^2}\mathrm{kg} = 2.4\mathrm{kg}. \tag{15}$$

Sostituendo il valore nell'equazione per I_O si ottiene:

$$I_O = \frac{1}{3} \cdot ML^2 = \frac{1}{3} \cdot 2.4 \cdot 0.5^2 \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 = 0.2\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2. \tag{16}$$

Dato che il sistema è composto anche dal blocco (di massa m_1) e dal proiettile (di massa m_2), entrambi agganciati alla sbarra a distanza L dal perno O, il momento d'inerzia dell'intero sistema rispetto ad O vale:

$$I_{\mathrm{TOT,O}} = I_O + (m_1 + m_2)L^2 = \left[0.2 + (1 + 0.002) \cdot 0.5^2\right] \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 = 0.45\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2. \tag{17}$$

Nell'urto tra proiettile e sbarra+blocco l'unica quantità che si conserva[1] è il momento angolare, per cui

$$m_2 v L = I_{\mathrm{TOT,O}} \cdot \omega, \tag{18}$$

da cui si ottiene che la velocità del proiettile prima dell'urto valeva:

$$v = \frac{I_{\mathrm{TOT,O}} \cdot \omega}{m_2 L} = \frac{0.45 \cdot 5}{0.002 \cdot 0.5}\mathrm{m/s} = 2250\mathrm{m/s} = 2.25 \cdot 10^3\mathrm{m/s}. \tag{19}$$

SOLUZIONI DEI QUESITI

1) La seconda legge di Newton, nella sua forma più generale, si può esprimere in termini della quantità di moto come

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{20}$$

dove $\mathbf{p} = \mathrm{m} \cdot \mathbf{v}$ rappresenta proprio la quantità di moto. Si noti che questa espressione ammette anche la possibilità che la massa del sistema possa variare nel tempo.

In maniera del tutto analoga, nel caso di moto rotazionale, la seconda legge di Newton si può esprimere come:

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{21}$$

in cui τ rappresenta il momento torcente, mentre $\mathbf{L}$ il momento angolare. Le leggi di Newton si applicano ai sistemi di riferimento inerziali.

[1] Si noti che la quantità di moto in questo caso non si conserva a causa della reazione vincolare del perno.

2) Un bambino fermo su una giostra che ruota a velocità angolare costante rispetto a un asse passante per il suo centro è sottoposto a un moto circolare uniforme. La velocità tangenziale varia con la distanza r dall'asse di rotazione come $v = \omega r$. Pertanto, se il bambino si trovasse in prossimità dell'asse di rotazione la sua velocità tangenziale sarebbe nulla.
3) La pressione di un fluido è il rapporto tra il modulo della forza agente ortogonalmente a una superficie e la sua area, vale a dire $p = F/A$. La pressione è una grandezza scalare. La sua unità di misura nel SI è il pascal (Pa). La pressione varia con la profondità in base alla legge di Stevino:

$$p = p_0 + \rho g h \tag{22}$$

in cui p_0 rappresenta la pressione in superficie (in genere la pressione atmosferica), ρ è la densità del fluido, g l'accelerazione di gravità e h la profondità rispetto alla superficie di separazione fluido/aria. In base a tale equazione all'aumentare della profondità la pressione aumenta. Viceversa, con l'altitudine diminuisce. In questo caso infatti $p = p_0 - \rho g h$, in cui p_0 è la pressione al livello $h = 0$, mentre ρ rappresenta la densità dell'aria.