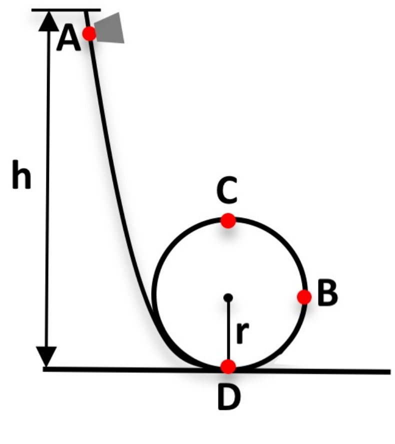
PROVA PARZIALE DEL 9 SETTEMBRE 2016
modulo I

September 28, 2016

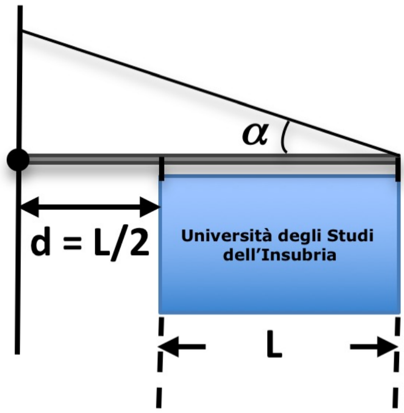
Si prega di svolgere nella maniera più chiara possibile il compito, di scrivere e risolvere le equazioni in gioco riportando tutti i passaggi e corredandoli di commenti. Riportare solo la formula finale o il risultato numerico corretto non verranno considerati sufficienti.

PROBLEMA 1)
Un carrellino di massa m= 100 g può scorrere senza attrito lungo la guida mostrata in figura, terminante con un arco di raggio r= 50 cm. a) Se viene lasciato cadere, da fermo, dal punto A ad altezza $h = 3r$, quali saranno la sua velocità e la sua energia cinetica nel punto B? E nel punto C? b) Quanto vale la forza centripeta nei punti B e C? c) Quanto la risultante delle forze agenti (in modulo) in ciascuno dei due punti? d) Ponendo l'energia potenziale U uguale a 0 nel punto D, quanto vale essa in A, B e C?



PROBLEMA 2)
Un'insegna uniforme di massa pari a m = 20 kg e larghezza L = 1 m è appesa a una barra orizzontale leggera imperniata al muro e sostenuta da un cavo in acciaio che forma un angolo α = 30 gradi rispetto all'asse orizzontale. Determinare: a) la tensione nel cavo; b) modulo e verso della componente orizzontale della forza esercitata dal muro sulla barra; c) modulo e verso

della componente verticale della forza esercitata dal muro sulla barra.



PROBLEMA 3)
In una gara di tuffi, un atleta si lancia orizzontalmente dalla piattaforma con una velocità di 2.5 m/s. Se la piattaforma si trova a 10 m di altezza, si calcolino: a) a quale distanza orizzontale dal bordo della piattaforma si troverà 1 s dopo lo stacco; b) a che altezza si troverà in quel momento rispetto all'acqua; c) dopo quanto tempo averrà l'ingresso in acqua; d) a quale distanza orizzontale dal bordo della piattaforma avverrà l'ingresso in acqua.

QUESITI
1) Si dia la definizione di quantità di moto. Si indichino le sue unità di misura in MKS e si espliciti se si tratta di una grandezza scalare o vettoriale. Si esprima la seconda legge di Newton in termini della quantità di moto.
2) Com'è definito il momento angolare di un corpo rigido? Una pattinatrice su ghiaccio vuole eseguire una rotazione su se stessa. Come deve posizionare le braccia rispetto al corpo per aumentare la velocità di rotazione? E per rallentare? Perchè?
3) Che cos'è un fluido? Come varia la pressione in una vasca contenente un fluido a riposo?

SOLUZIONI DEI PROBLEMI
1) Innanzitutto notiamo che nel punto A il carrellino possiede solo energia potenziale gravitazionale, mentre nei punti B e C parte di tale energia viene convertita in energia cinetica. Applicando la legge di conservazione dell'energia (il sistema è infatti isolato), si ottiene:
- per il punto B

$$mgh_{\rm A} = mgh_{\rm B} + 1/2mv_{\rm B}^2 \qquad (1)$$

in cui $h_{\mathrm{A}} = 3r$ e $h_{\mathrm{B}} = r$. Dall'Eq. (1) si ricava che v_{B} è pari a:

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{2g(3r - r)} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 2 \cdot 0.5}\mathrm{m/s} = 4.43\mathrm{m/s} \tag{2}$$

L'energia cinetica posseduta dal carrellino nel punto B vale pertanto:

$$K_{\mathrm{B}} = 1/2mv_{\mathrm{B}}^2 = 0.5 \cdot 0.1 \cdot 4.43^2\mathrm{J} = 0.98\mathrm{J} \tag{3}$$

- per il punto C

$$mgh_{\mathrm{A}} = mgh_{\mathrm{C}} + 1/2mv_{\mathrm{C}}^2 \tag{4}$$

da cui si ricava che v_{C} è pari a:

$$v_{\mathrm{C}} = \sqrt{2g(3r - 2r)} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.5}\mathrm{m/s} = 3.13\mathrm{m/s} \tag{5}$$

L'energia cinetica posseduta dal carrellino nel punto C vale pertanto:

$$K_{\mathrm{C}} = 1/2mv_{\mathrm{C}}^2 = 0.5 \cdot 0.1 \cdot 3.13^2\mathrm{J} = 0.49\mathrm{J} \tag{6}$$

Nota la velocità nei punti B e C, è possibile calcolare la forza centripeta agente sul carrellino:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{centr,B}} &= mv_{\mathrm{B}}^2/r = 0.1 \cdot 4.43^2/0.5\mathrm{N} = 3.92\mathrm{N} \\ F_{\mathrm{centr,C}} &= mv_{\mathrm{C}}^2/r = 0.1 \cdot 3.13^2/0.5\mathrm{N} = 1.96\mathrm{N} \end{aligned} \tag{7}$$

La risultante delle forze agenti nel punto B è la somma vettoriale della forza peso F_p, diretta verso il basso, e della forza normale, diretta verso il centro della circonferenza. Si noti che nel punto B quest'ultima coincide con la forza centripeta. Per calcolare la risultante è quindi sufficiente applicare il teorema di Pitagora:

$$F_{\mathrm{risult,B}} = \sqrt{F_p^2 + F_{\mathrm{centr,B}}^2} = \sqrt{(mg)^2 + F_{\mathrm{centr,B}}^2} = \sqrt{(0.1 \cdot 9.8)^2 + 3.92^2} = 4.04\mathrm{N} \tag{8}$$

Nel punto C le forze agenti sono di nuovo la forza peso e la normale, entrambe dirette verso il centro della circonferenza. Pertanto, in questo caso la forza risultante corrisponde proprio alla forza centripeta e quindi $F_{\mathrm{risult,C}} = 1.96$ N.

Per il calcolo dell'energia potenziale nei punti A, B e C è sufficiente applicare la definizione di energia potenziale gravitazionale:

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{A}} &= mgh_{\mathrm{A}} = 0.1 \cdot 9.8 \cdot 3 \cdot 0.5\mathrm{J} = 1.47\mathrm{J} \\ U_{\mathrm{B}} &= mgh_{\mathrm{B}} = 0.1 \cdot 9.8 \cdot 0.5\mathrm{J} = 0.49\mathrm{J} \\ U_{\mathrm{C}} &= mgh_{\mathrm{C}} = 0.1 \cdot 9.8 \cdot 2 \cdot 0.5\mathrm{J} = 0.98\mathrm{J} \end{aligned} \tag{9}$$

2) Pe poter risolvere il problema occorre ricordare che, affinchè l'insegna resti in equilibrio, la risultante delle forze e quella dei momenti torcenti devono essere uguali a zero. Scomponendo le forze lungo x e y si ha:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{x}} - T\cos\alpha &= 0 \\ -mg + F_{\mathrm{y}} + T\sin\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

dove T è la tensione del cavo, mentre F_{x} e F_{y} sono le componenti, rispettivamente lungo x e y, della forza esercitata dal muro sulla barra. La conservazione del momento torcente può essere calcolata rispetto al perno nel muro, in modo tale da ridurre il numero di forze coinvolte:

$$-mgL + 3/2LT\sin\alpha = 0 \tag{11}$$

Risolvendo l'Eq. (11) per T, si ottiene che:

$$T = 2mg/(3\sin\alpha) = 4/3 \cdot 20 \cdot 9.8\mathrm{N} = 261.3\mathrm{N}. \tag{12}$$

Nota T, le componenti F_{x} e F_{y} si ottengono dal sistema (10):

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{x}} &= T\cos\alpha = 261.3 \cdot \sqrt{3}/2\mathrm{N} = 226.3\mathrm{N} \\ F_{\mathrm{y}} = mg - T\sin\alpha &= 20 \cdot 9.8 - 261.3 \cdot 1/2\mathrm{N} = 65.3\mathrm{N} \end{aligned} \tag{13}$$

Dal risultato emerge che F_{x} è rivolta verso destra (esce dal muro), mentre F_{y} verso l'alto.

3) Il tuffatore, una volta lanciatosi, si muove di moto parabolico fino all'ingresso in acqua. Dato che, al momento del tuffo, possiede solo la componente orizzontale della velocità (si lancia infatti orizzontalmente dalla piattaforma), le equazioni del moto lungo gli assi x e y diventano:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= y_0 - 1/2gt^2 \end{aligned} \tag{14}$$

A t= 1s, il tuffatore si troverà dunque a una distanza orizzontale $x = 2.5 \cdot 1\mathrm{m} = 2.5\mathrm{m}$ dal bordo della piattaforma e ad un'altezza $h = 10 - 0.5 \cdot 9.8 \cdot 1\mathrm{m} = 5.1\mathrm{m}$ rispetto all'acqua. Utilizzando l'equazione per y in $y = 0$, è anche possibile calcolare dopo quanto tempo averrà il tuffo in acqua:

$$0 = 10 - 1/2 \cdot 9.8 t_{\mathrm{TOT}}^2 \tag{15}$$

da cui $t_{\mathrm{TOT}} = \sqrt{10 \cdot 2/9.8}\mathrm{s} = \sqrt{20/9.8}\mathrm{s} = 1.4\mathrm{s}$ Infine, sostituendo il tempo di volo nell'equazione per il moto orizzontale, si ricava che la distanza dal bordo della piattaforma alla quale avverrà il tuffo sarà pari a $x = v_0 t_{\mathrm{TOT}} = 2.5 \cdot 1.4\mathrm{m} = 3.5\mathrm{m}$.

SOLUZIONI DEI QUESITI

1) La quantitá di moto è una grandezza vettoriale associata al moto di un corpo di massa m che si muove a velocità v: $\vec{p} = m\vec{v}$.
Le sue unità di misura nel sistema MKS sono $kg \cdot m/s$.
Esprimere la seconda legge di Newton in termini della quantitá di moto mette in evidenza che l'esistenza di una forza può dipendere da una variazione di massa o da una variazione di velocità. Infatti, si ha che: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.

2) Il momento angolare di un corpo rigido si esprime in termini del momento d'inerzia del corpo rigido I e della velocità angolare ω come $L = I\omega$.
La pattinatrice su ghiaccio che ruota su se stessa costituisce un sistema isolato in cui il momento angolare si conserva. Se vuole ruotare veloce, cioè a velocità angolare più elevata, è pertanto necessario che diminuisca il proprio momento d'inerzia. Per definizione, questo significa compattare la distribuzione di massa del corpo e quindi avvicinare le braccia al corpo. Viceversa, per diminuire la propria velocità di rotazione è sufficiente che la pattinatrice aumenti il momento d'inerzia e quindi allarghi le braccia.

3) Un fluido è un corpo in grado di scorrere. Sono fluide sia le sostanze liquide che quelle aeriformi, entrambe prive di forma propria.
La pressione p in una vasca contenente un fluido a riposo di densità ρ varia con la profondità h secondo la legge di Stevino: $p = p_0 + \rho g h$, in cui p_0 rappresenta la pressione in superficie. Questo significa che aumentando la profondità cresce la pressione.