SOLUZIONI DEI PROBLEMI RELATIVI AL TEMA D'ESAME DEL 12 GENNAIO 2016

January 15, 2016

PROBLEMA 1)
Una speleologa viene estratta da un anfratto con un argano motorizzato. Il sollevamento è realizzato in tre stadi -a), b) e c)-, ciascuno dei quali copre una distanza di 10 m. In a) la speleologa, inizialmente ferma, viene accelerata fino a raggiungere una velocità di 5 m/s; in b) viene poi alzata a velocità costante pari a 5m/s; infine in c) la sua velocità viene rallentata fino a zero. Che lavoro è stato svolto dalla forza di sollevamento in ciascun stadio sulla speleologa, la cui massa è di 60 kg?

Esistono due metodi per risolvere questo problema. Il primo si basa sulla cinematica, mentre il secondo sul teorema dell'energia cinetica.
Metodo 1
In tutti e tre i tratti il lavoro della forza di sollevamento è pari a $L = F_{\text{soll}}h$. La forza di sollevamento, diretta verso l'alto, ha verso opposto alla forza peso, diretta verso il basso. Durante lo stadio a), la risultante delle due forze è diretta verso l'alto perchè l'accelerazione è positiva, essendo il moto uniformemente accelerato, quindi $F_{\text{soll}} - mg = ma$, da cui consegue che $F_{\text{soll}} = m(g + a)$. Per calcolare a si possono utilizzare la legge del moto e la variazione di velocità nel tempo:

$$\begin{aligned} h &= v_0 t + 1/2 a t^2 \qquad (1) \\ v &= v_0 + at. \qquad (2) \end{aligned}$$

Ponendo $v_0 = 0$, dalla seconda equazione ricaviamo il tempo in funzione di a e v e lo sostituiamo nella prima equazione, in modo tale da trovare l'espressione di a in funzione dei soli dati noti, cioè la quota e la velocità finale:

$$a = \frac{v^2}{2h} \qquad (3)$$

A questo punto, il lavoro svolto dalla forza di sollevamento F_{soll} è

$$L = F_{\text{soll}}h = m(g + a)h = 60[9.8 + 25/(2 \cdot 10)]10J = 6630J \qquad (4)$$

Durante lo stadio b) la speleologa si muove a velocità costante. Pertanto la forza di sollevamento, diretta verso l'alto, controbilancia esattamente la forza peso, diretta verso il basso. Il lavoro svolto nel tratto b) vale pertanto:

$$L = F_{\text{soll}} h = mgh = 60 \cdot 9.8 \cdot 10J = 5880J \quad (5)$$

Durante lo stadio c), la speleologa si muove di moto rettilineo uniformemente decelerato. In questo caso, la risultante delle due forze è diretta verso il basso, cioè $F_{\text{soll}} - mg = -ma$, da cui consegue che $F_{\text{soll}} = m(g - a)$. L'accelerazione si può nuovamente ricavare dalle equazioni del moto. Comunque, si può anche fare la seguente considerazione: dal momento che la variazione di velocità è la stessa del tratto a) e lo spazio percorso anche, l'unica differenza sta nel segno, per cui $a = -1.25m/s^2$. A questo punto, il lavoro svolto dalla forza di sollevamento è:

$$L = F_{soll} h = m(g - a)h = 60[9.8 - 25/(2 \cdot 10)]10J = 5130J \quad (6)$$

Metodo 2
Il secondo metodo si basa su considerazioni di tipo energetico ed è più immediato del primo. Nel tratto a) il lavoro svolto dalla forza di sollevamento deve non solo controbilanciare il lavoro svolto dalla forza peso, ma anche fornire energia cinetica per accelerare la speleologa da 0 m/s a 5 m/s. Pertanto il lavoro svolto dalla forza di sollevamento è pari a:

$$L = F_{soll} h = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = m(gh + \frac{v^2}{2}) = 60(9.8 \cdot 10 + \frac{25}{2})J = 6630J. \quad (7)$$

Nel tratto b) il lavoro svolto dalla forza di sollevamento deve semplicemente controbilanciare il lavoro svolto dalla forza peso, per cui:

$$L = F_{soll} h = mgh = 60 \cdot 9.8 \cdot 10J = 5880J. \quad (8)$$

Nel tratto c) il lavoro svolto dalla forza di sollevamento controbilancia il lavoro svolto dalla forza peso, ma al tempo stesso cede energia cinetica per decelerare la speleologa da 5 m/s a 0 m/s. Pertanto il lavoro svolto dalla forza di sollevamento è pari a:

$$L = F_{soll} h = mgh - \frac{1}{2}mv^2 = m(gh - \frac{v^2}{2}) = 60(9.8 \cdot 10 - \frac{25}{2})J = 5130J. \quad (9)$$

PROBLEMA 2)
Un blocco di massa 1 kg, fermo su una superficie orizzontale priva di attrito, è attaccato ad una molla a riposo, con costante elastica pari a 200 N/m, fissata al muro all'estremità opposta. Un blocco di massa 2 kg, in moto con velocità pari s 4 m/s, urta il blocco fermo. Se i due blocchi rimangono attaccati dopo una collisione unidimensionale, qual è la massima compressione

della molla che si verifica allarresto dei blocchi?

Il problema si risolve in due passaggi. In primo luogo, tra il blocco fermo e il blocco in moto a velocità costante avviene un urto anelastico perchè dopo l'urto i due corpi viaggiano attaccati. Possiamo pertanto trovare la velocità del sistema dopo l'urto dalla legge di conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f \tag{10}$$

da cui

$$v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 4}{1 + 2} m/s = \frac{8}{3} m/s = 2.67 m/s \tag{11}$$

in cui si è posto $v_1 = 0$. Per calcolare la compressione della molla è sufficiente ricorrere alla legge di conservazione dell'energia, in quanto, dopo l'urto, l'energia cinetica del sistema, in assenza di attriti, viene utilizzata tutta per comprimere la molla:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2} k x^2 \tag{12}$$

Risolvendo per x si ha:

$$x = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{k}} \cdot v_f = \sqrt{\frac{3}{200}} \cdot \frac{8}{3} m = 0.33 m \tag{13}$$

PROBLEMA 3)
Un bambino di massa 35 kg sta sul bordo di una giostra, ferma e libera di ruotare, di massa 100 kg e raggio 2 m. Il momento dinerzia della giostra rispetto al suo asse è di 150 kg m2. Il bambino afferra al volo una palla di massa 0.5 kg, lanciata da un amico a terra, che gli giunge con una velocità di modulo 12 m/s lungo la tangente al punto esterno della giostra dove siede il bambino. Qual è il momento d'inerzia del sistema giostra+bambino+palla? Che velocità assume la giostra col bambino dopo la presa?

Il momento d'inerzia del sistema viene calcolato rispetto all'asse passante per il centro della giostra, ciè per il suo asse di rotazione. Il momento d'inerzia della giostra ci viene dato, mentre quello di bambino e palla, dopo che quest'ultima è stata afferrata, si ricava dalla definizione valida per i sistemi discreti:

$$I_{\text{bambino+palla}} = (m_{bambino} + m_{palla}) \cdot r^2 = (35 + 0.5) 2^2 \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 142 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \tag{14}$$

dove r è il raggio della giostra. Il momento d'inerzia del sistema giostra+bambino+palla vale:

$$I_{\text{giostra+bambino+palla}} = I_{\text{giostra}} + I_{\text{bambino+palla}} = (150 + 142) \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 292 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \tag{15}$$

Dato che la palla giunge al bambino con una velocità v_p pari a 12 m/s, tangente al punto della giostra dove siede il bambino, essa è caratterizzata da un momento angolare pari a:

$$L_{\text{palla}} = m_{\text{palla}} \cdot v_p \cdot r \tag{16}$$

Tale momento angolare, una volta che la palla è stata afferrata, determina una rotazione del sistema giostra+bambino+palla in base al principio di conservazione del momento angolare:

$$L_{\text{palla}} = L_{\text{sistema}} = I_{\text{giostra+bambino+palla}} \omega \tag{17}$$

da cui si può ricavare la velocità angolare:

$$\omega = \frac{L_{\text{palla}}}{I_{\text{giostra+bambino+palla}}} = \frac{(0.5 \cdot 12 \cdot 2)}{292} \text{rad/s} = 0.04 \text{rad/s} \tag{18}$$