PROVA PARZIALE DEL 13 LUGLIO 2017
modulo I

July 31, 2017

Si prega di svolgere nella maniera più chiara possibile il compito, di scrivere e risolvere le equazioni in gioco riportando tutti i passaggi e corredandoli di commenti. Riportare solo la formula finale o il risultato numerico corretto non verranno considerati sufficienti.

PROBLEMA 1)
Un ragazzo lancia un pallone da calcio dalla cima di un edificio con una velocità iniziale di 8 m/s, avente un'inclinazione di 20 gradi verso il basso rispetto al piano orizzontale. Nell'ipotesi che la palla colpisca il suolo dopo 3 s, si indichino a) a quale distanza orizzontale dalla base dell'edificio atterra il pallone, b) qual è l'altezza dell'edificio. Si indichi inoltre dopo quanto tempo il pallone si troverà ad un'altezza di 10 m al di sotto del livello di lancio.

PROBLEMA 2)
Una lattina piena di coca-cola, avente una massa di 350 g e un diametro di 5 cm, rotola giù da un piano inclinato di 30 gradi rispetto all'orizzontale. Il piano è lungo 3 m. Se la lattina raggiunge la base del piano dopo 1.5 s, si calcolino a) l'accelerazione della lattina, b) la velocità finale con cui arriva al suolo, c) il momento d'inerzia della lattina.

PROBLEMA 3)
Un tubo orizzontale in cui scorre acqua è caratterizzato da due diametri differenti alle sue estremità. A destra il diametro è largo 10 cm, mentre a sinistra è largo 5 cm. Nell'ipotesi che la pressione dell'acqua nella sezione più larga valga 8×10^4 Pa, mentre in quella più stretta 6×10^4 Pa, si determini la velocità nelle due sezioni e la portata massica. Si ricordi che la densità dell'acqua vale 1000 kg/m^3.

QUESITI
1) Quali sono le possibili leggi di conservazione in meccanica classica? Per ogni grandezza fisica coinvolta si enunci la legge e si faccia un esempio pratico

di conservazione.
2) Si dia la definizione di pressione in un fluido. Si tratta di una grandezza scalare o vettoriale? Qual è la sua unità di misura nel SI? Si enunci la legge di Stevino.
3) Si enuncino le tre leggi di Keplero. In quale posizione della sua orbita la velocità di un pianeta è massima? In quale è minima?

SOLUZIONI DEI PROBLEMI
1) Il pallone si muove di moto parabolico: lungo l'asse x il moto è rettilineo uniforme, mentre lungo l'asse y è rettilineo uniformemente accelerato. Le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} \cdot t \\ y &= y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{aligned} \tag{1}$$

La velocità iniziale, di modulo pari a 8 m/s e formante un angolo di $\alpha = 20$ gradi verso il basso rispetto all'asse orizzontale, va scomposta lungo i due assi:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cdot \cos(-\alpha) = 7.52 \text{m/s} \\ v_{0y} &= v_0 \cdot \sin(-\alpha) = -2.74 \text{m/s}. \end{aligned} \tag{2}$$

Pertanto, sostituendo l'espressione della velocità v_{0x} nella prima equazione del sistema (1), si ricava che la distanza orizzontale, rispetto alla base dell'edificio, a cui atterra il pallone è data da:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t = 0 + 7.52 \cdot 3 \text{m} = 22.56 \text{m/s}. \tag{3}$$

L'altezza dell'edificio è invece ricavabile dalla seconda equazione ponendo $y = 0$:

$$y_0 = -v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 = (2.74 \cdot 3 + \frac{1}{2} 9.8 \cdot 3^2) \text{m} = 52.32 \text{m}. \tag{4}$$

Per ricavare dopo quanto tempo il pallone si troverà a 10 m dalla sommità dell'edificio, basta utilizzare di nuovo la seconda equazione del sistema (1) ponendo $y_0 = 52.32$ m e $y = 52.32 - 10 = 42.32$ m:

$$0 = y_0 - y + v_{0y} \cdot t' - \frac{1}{2} g \cdot t'^2 = (10 - 2.74 \cdot t' - \frac{1}{2} 9.8 \cdot t'^2). \tag{5}$$

Risolvendo per t', si ottiene che $t' = 1.18$ s.

2) Per calcolare l'accelerazione della lattina e la velocità finale con cui arriva al suolo, occorre tener presente che il moto della lattina lungo il piano

inclinato è rettilineo uniformemente accelerato per cui la legge oraria è data da:

$$\Delta s = \frac{1}{2} a \cdot t^2. \tag{6}$$

Ponendo $\Delta s = 3$ m e $t = 1.5$ s, si ricava che $a = 2 \cdot \Delta s / t^2 = 2.67$ m/s^2. Nota l'accelerazione, la velocità finale della lattina (che parte da ferma) è:

$$v = a \cdot t = 2.67 \cdot 1.5 \text{m/s} = 4 \text{m/s}. \tag{7}$$

A questo punto, per ottenere il momento d'inerzia della lattina, basta applicare la conservazione dell'energia. Infatti, in cima al piano inclinato la lattina possiede solo energia potenziale gravitazionale, che in fondo al piano inclinato si converte tutta in energia cinetica (traslazionale e rotazionale):

$$Mgh = \frac{1}{2} M \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2, \tag{8}$$

in cui $\omega = v/r = 4/0.025 \text{rad/s} = 160 \text{rad/s}$. Risolvendo per I, si ottiene che il momento d'inerzia della lattina vale:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2M}{\omega^2}(gh - v^2/2) = \frac{2 \cdot 0.35}{160^2}(9.8 \cdot 3 \cdot \sin(30) - 4^2/2) \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\ &= 1.8 \cdot 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned} \tag{9}$$

3) Per calcolare la velocità nelle due sezioni, occorre applicare il teorema di Bernoulli e l'equazione Vdi continuità:

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ A_1 \cdot v_1 &= A_2 \cdot v_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Dalla seconda equazione, ricordando che $A_i = \pi r_i^2$, si ottiene che

$$v_1 = \frac{d_2^2}{d_1^2} v_2. \tag{11}$$

Sostituendo l'espressione per v_1 nella prima equazione del sistema (10), si ricava che

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - \frac{d_2^4}{d_1^4} v_2^2\right) = \frac{\rho \cdot v_2^2}{2}\left(1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}\right), \tag{12}$$

che, risolta per v_2, dà:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right]}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^4}{1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right)}} \text{m/s} = 6.53 \text{m/s}. \tag{13}$$

Nota v_2, dall'equazione (11) è pertanto possibile ricavare anche il valore di v_1, che risulta pari a:

$$v_1 = \frac{d_2^2}{d_1^2} v_2 = \frac{1}{4} \cdot 6.53 \mathrm{m/s} = 1.63 \mathrm{m/s}. \tag{14}$$

Infine, la portata massica, definita come $R_m = \rho \cdot A \cdot v = \rho \cdot A_2 \cdot v_2 = \rho \cdot A_1 \cdot v_1 = (1000 \cdot \pi \cdot 0.0025 \cdot 1.63) \mathrm{kg/s} = 12.8 \mathrm{kg/s}$.