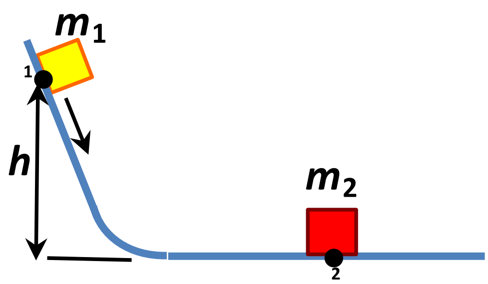
PROVA PARZIALE DEL 18 FEBBRAIO 2016

March 1, 2016

Si prega di svolgere nella maniera più chiara possibile il compito, di scrivere e risolvere le equazioni in gioco riportando tutti i passaggi e corredandoli di commenti. Riportare solo la formula finale o il risultato numerico corretto non verranno considerati sufficienti.

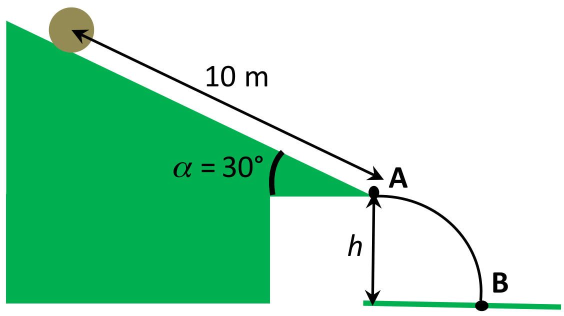
PROBLEMA 1)
Si consideri il percorso mostrato in figura. Un blocco di massa $m_1 = 2$ kg, inizialmente fermo, viene lasciato cadere lungo una guida dalla posizione 1, posta ad un altezza $h = 3$ m dal suolo. Giunto nella posizione 2, urta elasticamente e centralmente un blocco di massa $m_2 = 4$ kg, inizialmente a riposo. Si calcoli a) se la massa m_1 rimbalza indietro o procede verso destra dopo l'urto, b) la massima altezza raggiunta da m_1 dopo l'urto, c) la velocità (modulo, direzione e verso) della massa m_2 dopo l'urto.



PROBLEMA 2)
Durante i test per una gara di *Cheeserolling* [1] una forma di formaggio di massa 20 kg e diametro pari a 30 cm viene fatta rotolare giù per una collina avente una pendenza di 30 gradi rispetto al piano orizzontale. Dopo aver percorso 10 m lungo il piano inclinato, giunta nella posizione A, la forma incontra un dislivello di 1.5 m, per cui, seguendo un moto parabolico (si assuma che la forma smetta di ruotare su se stessa), cade a terra nella posizione B.

[1] Il Cheeserolling è una competizione sportiva, in cui i partecipanti si devono fronteggiare in una corsa lungo pendii fortemente scoscesi, rincorrendo una forma di formaggio che rotola.

a) Quando la forma di formaggio si trova nella posizione A, qual è la sua velocità angolare rispetto ad un asse passante per il centro di massa? (Si assuma che il momento d'inerzia del formaggio rispetto a tale asse valga $I = 0.225$ kg $\cdot$ m^2 e che nel moto lungo la collina la forma rotoli senza strisciare, trascurando eventuali forze d'attrito con il terreno).
b) Si determinino le coordinate spaziali della posizione B rispetto alla posizione A.
c) A che velocità la forma tocca terra nella posizione B?
Si trascuri in tutto il problema la resistenza dell'aria.



PROBLEMA 3)
Al fine di determinare la purezza di una medaglia apparentemente d'oro, un gioielliere decide di effettuare una doppia pesata dell'oggetto, rispettivamente in aria e in acqua (corpo completamente immerso). Nell'ipotesi che la pesata in aria dia come risultato 0.79 N e quella in acqua 0.7 N, è possibile che la medaglia non sia d'oro puro? Qual è la densità della medaglia ottenuta con il metodo della doppia pesata? Si assuma che la densità dell'oro valga $19.3 \cdot 10^3$ kg/m^3 e quella dell'acqua 10^3 kg/m^3.

QUESITI
1) Si diano le definizioni di quantità di moto e di energia cinetica per un corpo puntiforme. Se la velocità di un corpo viene triplicata, di quanto cambia la sua quantità di moto? E la sua energia cinetica?
2) Cos'è il centro di massa di un corpo esteso? Se ne dia una definizione sia per un numero finito di particelle che per una distribuzione continua di massa. Può il centro di massa di un corpo trovarsi al di fuori di esso? Se sì, si faccia almeno un esempio.
3) Si dia la definizione di momento di una forza. Se su un corpo rigido agisce una sola forza ed il momento della forza rispetto ad un certo punto è diverso da zero, si dica, se esiste, qual è il punto rispetto al quale il momento della forza è nullo.

SOLUZIONI DEI PROBLEMI
1) Innanzitutto notiamo che il blocco di massa m_1 costituisce inizialmente

un sistema isolato sottoposto alla forza di gravità. Cadendo da fermo a partire da un'altezza h, la sua energia potenziale gravitazionale si trasforma completamente in energia cinetica:

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_{1i}^2$$

da cui si ricava che la velocità con cui il blocco arriva a colpire il corpo di massa m_2 è $v_{1i} = \sqrt{2gh} = 7.67$ m/s.
Dal momento che l'urto è centrale e perfettamente elastico, si conservano quantità di moto ed energia cinetica:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1i} &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} &(1)\\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 &(2) \end{aligned}$$

Dall'equazione (1) ricaviamo $v_{1f} = v_{1i} - \frac{m_2}{m_1} v_{2f}$, che, sostituito nell'equazione (2), dà:

$$0 = \frac{m_2^2}{2m_1} v_{2f}^2 - m_2 v_{1i} v_{2f} + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2.$$

Raccogliendo v_{2f} e, si ottiene

$$0 = v_{2f}\left(\frac{m_2^2}{2m_1} v_{2f} - m_2 v_{1i} + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}\right)$$

per cui, scartando la soluzione $v_{2f} = 0$,

$$v_{2f} = \frac{m_2 v_{1i}}{\frac{m_2^2}{2m_1} + \frac{m_2}{2}} = \frac{4 \cdot 7.67}{4+2} \mathrm{m/s} = 5.11 \mathrm{m/s}.$$

Nota v_{2f}, si ricava che $v_{1f} = v_{1i} - \frac{m_2}{m_1} v_{2f} = 7.67 - 2 \cdot 5.11 \mathrm{m/s} = -2.55 \mathrm{m/s}$. Questo significa che la massa m_1, dopo l'urto, torna indietro e raggiunge una nuova altezza h', ricavabile dalla conservazione dell'energia:

$$m_1 g h' = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_{1f}^2$$

La nuova altezza è pertanto pari a:

$$h' = \frac{v_{1f}^2}{2g} = \frac{2.55^2}{19.6} \mathrm{m} = 0.33 \mathrm{m}$$

2) Nel primo tratto il formaggio rotola giù per la collina trasformando la sua energia potenziale gravitazionale in energia cinetica (traslazione e rotazionale). Vale pertanto la conservazione dell'energia:

$$mgh = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2.$$

Tenendo conto del fatto che $h = l \sin\alpha = l \sin 30 = 5\text{m}$ e che la relazione tra velocità tangenziale e velocità angolare è $v = \omega r$, si ottiene che

$$mgl\sin\alpha = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}(mr^2 + I)$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgl\sin\alpha}{(mr^2+I)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20\cdot 9.8\cdot 5}{(20\cdot 0.15^2 + 0.225)}}\text{rad/s} = 53.89\text{rad/s}.$$

La velocità tangenziale ai piedi della collina avrà componenti:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \omega r\cos\alpha = 53.89\cdot 0.15\cdot 0.87\text{m/s} = 7\text{m/s} \\ v_{0y} &= \omega r\sin\alpha = 53.89\cdot 0.15\cdot 0.5\text{m/s} = 4.04\text{m/s} \end{aligned}$$

Si noti che v_{0y} è rivolta verso il basso.
Considerando ora la forma come un corpo puntiforme sottoposto a moto parabolico, le sue equazioni del moto sono:

$$x = v_{0x}t \quad (3)$$
$$y = y_0 - v_{0y}t - 1/2gt^2. \quad (4)$$

Sostituendo i valori numerici nell'equazione (4), si ha:

$$0 = 1.5 - 4.04t - 4.9t^2$$

le cui soluzioni sono rispettivamente $t = 0.28$ s e $t = -1.1$s. Dato che la soluzione ricercata è quella con segno positivo, sostituendola nell'equazione (3), si ottiene che la distanza a cui la forma cade rispetto al punto A vale $x = 7\cdot 0.28\text{m} = 1.96\text{m}$. La velocità con cui la forma tocca terra avrà componenti:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} = 7\text{m/s} \\ v_y &= -v_{0y} - gt = -4.04 - 9.8\cdot 0.28\text{m/s} = -6.78\text{m/s} \end{aligned}$$

per cui il suo modulo sarà pari a: $v_f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 9.75\text{m/s}$.

3) Il fatto che la pesata della medaglia sia minore in acqua che in aria è da imputare alla forza di Archimede, che spinge la medaglia verso l'alto. L'entità di tale spinta è data dalla differenza tra i due pesi:

$$F_{\text{A}} = P_{\text{aria}} - P_{\text{acqua}} = (0.79 - 0.7)\text{N} = 0.09\text{N}.$$

F_{A} risulta per definizione uguale al peso del fluido spostato, avente volume uguale a quello della medaglia, cioè $F_{\text{A}} = \rho_{\text{acqua}}Vg$. Da questa espressione è pertanto possibile ricavare il volume dell'oggetto:

$$V = \frac{F_{\text{A}}}{\rho_{\text{acqua}}g} = \frac{0.09}{1000\cdot 9.8}\text{m}^3 = 9.18\cdot 10^{-6}\text{m}^3$$

Dal momento che la massa della medaglia si può ottenere facilmente dal peso in aria $m = P_{\text{aria}}/g$, la sua densità effettiva sarà

$$\rho_{\text{medaglia}} = \frac{m}{V} = \frac{0.79}{9.18 \cdot 10^{-6} \cdot 9.8} \text{kg/m}^3 = 8781 \text{kg/m}^3$$

Tale densità si discosta parecchio da quella dell'oro.

SOLUZIONI DEI QUESITI

1) La quantità di moto è una grandezza fisica vettoriale associata ad un corpo dotato di massa e velocità. Per definizione $q = m \cdot v$. L'energia cinetica è una forma di energia associata ad un corpo in movimento e vale $K = 1/2 \cdot mv^2$. Dato che la quantità di moto è linearmente proporzionale a v, mentre l'energia cinetica manifesta una dipendenza quadratica, se la velocità triplica, q triplica a sua volta, mentre l'energia aumenta di un fattore 9.
2) Il centro di massa di un corpo esteso è il punto corrispondente al valor medio della sua distribuzione di massa. Nel caso di distribuzione discreta di massa (N particelle), le coordinate del centro di massa saranno pari a

$$\begin{aligned} x_{\text{cm}} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \\ y_{\text{cm}} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \\ z_{\text{cm}} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \end{aligned}$$

Se la distribuzione di massa è continua, alla sommatoria si sostituisce l'integrale:

$$\begin{aligned} x_{\text{cm}} &= \frac{\int x dm}{\int dm} \\ y_{\text{cm}} &= \frac{\int y dm}{\int dm} \\ z_{\text{cm}} &= \frac{\int z dm}{\int dm} \end{aligned}$$

Il centro di massa di un corpo non necessariamente si trova al suo interno. Un controesempio è dato da una ciambella o da un ferro di cavallo.
3) Il momento di una forza rispetto a un punto O è il prodotto vettoriale tra il braccio, ossia la distanza tra il punto O ed il punto di applicazione della forza, e la forza stessa. Una forza, che abbia momento non nullo rispetto ad un certo punto, ha momento nullo rispetto al suo punto di applicazione, per il quale il braccio risulta uguale a zero.