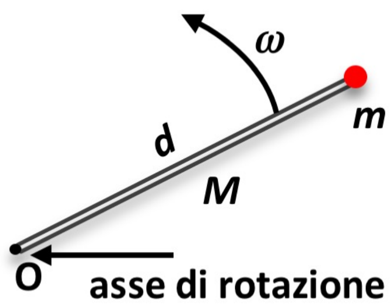
PROVA PARZIALE DEL 19 DICEMBRE 2016
modulo I

January 8, 2017

Si prega di svolgere nella maniera più chiara possibile il compito, di scrivere e risolvere le equazioni in gioco riportando tutti i passaggi e corredandoli di commenti. Riportare solo la formula finale o il risultato numerico corretto non verranno considerati sufficienti.

PROBLEMA 1)
Un bambino trascina uno slittino di massa 8 kg su per un pendio innevato con una pendenza di 10 gradi rispetto all'orizzontale. Nel fare ciò, esercita una forza di 20 N su una corda legata allo slittino. Nell'ipotesi che la corda sia parallela al piano inclinato, si determini il coefficiente di attrito dinamico tra lo slittino e la neve. Una volta giunto in cima al pendio, il bambino sale sullo slittino e scivola giù. Calcolare l'accelerazione nella discesa. Si ripeta il calcolo di coefficiente di attrito dinamico ed accelerazione anche nel caso in cui la corda tirata durante la fase di salita formi un angolo di 30 gradi rispetto all'orizzontale.

PROBLEMA 2)
Una particella di massa pari a $m = 0.85$ kg è collegata a un asse di rotazione



passante per l'origine O tramite una sbarra sottile di massa $M = 1.2$ kg e lunghezza $d = 10$ cm. Particella e sbarra ruotano insieme intorno all'asse in O con velocità angolare $\omega = 0.5$ rad/s. Si calcolino il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse passante per O e l'energia cinetica rotazionale rispetto a O.

PROBLEMA 3)
Le sezioni di ingresso e uscita di un tubo orizzontale sono rispettivamente $A = 2 \cdot 10^2$ m^2 e $B = 10^{-1}$ m^2. Se all'interno del tubo scorre dell'acqua di densità pari a 1000 kg/m^3 e la differenza di pressione tra i due punti estremi è pari a $5 \cdot 10^3$ Pa, si determinino le velocità del fluido nei punti A e B, la portata volumica e la portata massica del tubo.

QUESITI
1) Com'è definita la potenza meccanica? In quali unità di misura si può misurare (nel Sistema Internazionale e non solo). Si tratta di una grandezza fisica scalare o vettoriale?
2) Si dia la definizione di urto. Cosa distingue un urto perfettamente elastico da uno anelastico? Quali leggi di conservazione caratterizzano i due tipi di urto?
3) Quali grandezze fisiche vengono utilizzate per avere una condizione di equilibrio? Com'è definita la condizione di equilibrio statico? Un libro appoggiato sul piano del tavolo si trova in posizione di equilibrio? È in equilibrio di tipo statico? E una lumaca che viaggia a velocità costante?

SOLUZIONI DEI PROBLEMI
1) Innanzitutto notiamo che le forze agenti sullo slittino in fase di salita sono: la forza F esercitata dal bambino tramite la corda, la componente lungo il piano inclinato della forza peso $mg \cdot \sin(\alpha)$ e la forza di attrito dinamico F_k. Nella direzione ortogonale al piano inclinato agiscono l'altra componente della forza peso $mg \cdot \cos(\alpha)$ e la normale al piano F_N. Dato che in entrambe le direzioni non agiscono forze nette (lungo il piano inclinato la slitta si muove a velocità costante e nella direzione ortogonale non c'è moto), la seconda legge di Newton nelle due direzioni è:

$$0 = F - F_k - mg \cdot \sin(\alpha) \tag{1}$$
$$0 = -mg \cdot \cos(\alpha) + F_N. \tag{2}$$

Nella prima equazione $F_k = \mu_k F_N$, per cui ricavando F_N dalla seconda equazione e risolvendo la prima per μ_k si ottiene:

$$\mu_k = \frac{F - mg \cdot \sin(\alpha)}{mg \cdot \cos(\alpha)} = \frac{20 - 8 \cdot 9.8 \cdot \sin(10)}{8 \cdot 9.8 \cdot \cos(10)} = 0.08. \tag{3}$$

Durante la discesa il bambino sale sullo slittino e scende lungo il pendio con accelerazione costante. In questo caso la seconda legge di Newton nella direzione parallela al piano cambia, mentre nella direzione ortogonale resta invariata:

$$ma = mg \cdot \sin(\alpha) - \mu_k F_N \tag{4}$$

$$0 = -mg \cdot \cos(\alpha) + F_N. \tag{5}$$

Risolvendo per a la prima equazione, si ha:

$$a = g \cdot [\sin(\alpha) - \mu_k \cos(\alpha)] = 9.8 \cdot [\sin(10) - 0.08 \cos(10)] \mathrm{m/s^2} = 0.9 \mathrm{m/s^2}. \tag{6}$$

Se la corda tirata dal bambino forma un angolo $\beta = 30$ gradi rispetto all'orizzontale, lungo il piano inclinato agirà la forza $F \cos(\beta - \alpha)$, mentre nella direzione ortogonale la forza sarà pari a $F \sin(\beta - \alpha)$. Pertanto in fase di salita la seconda legge di Newton nelle due direzioni sarà:

$$0 = F \cos(\beta - \alpha) - \mu_k F_N - mg \cdot \sin(\alpha) \tag{7}$$

$$0 = -mg \cdot \cos(\alpha) + F_N + F \sin(\beta - \alpha). \tag{8}$$

Risolvendo per μ_k si ha:

$$\mu_k = \frac{F \cos(\beta - \alpha) - mg \cdot \sin(\alpha)}{mg \cdot \cos(\alpha) - F \sin(\beta - \alpha)} = \frac{20 \cos(20) - 8 \cdot 9.8 \cdot \sin(10)}{8 \cdot 9.8 \cdot \cos(10) - 20 \sin(20)} = 0.07. \tag{9}$$

Con questo valore del coefficiente di attrito, l'accelerazione in fase di discesa sarà pari a:

$$a = g \cdot [\sin(\alpha) - \mu_k \cos(\alpha)] = 9.8 \cdot [\sin(10) - 0.07 \cos(10)] \mathrm{m/s^2} = 0.99 \mathrm{m/s^2}. \tag{10}$$

2) Il momento d'inerzia del sistema è dato dalla somma del momento d'inerzia della sbarra più quello della particella. Il momento d'inerzia della sbarra rispetto a un asse passante per l'origine O si può calcolare a partire da quello rispetto a un asse passante per il suo centro di massa tramite il teorema degli assi paralleli.
Il momento d'inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa è dato da:

$$I_{\mathrm{CM}} = \int_{x=-d/2}^{d/2} x^2 dm = \int_{x=-d/2}^{d/2} x^2 \frac{M}{d} dx = \frac{1}{12} M d^2. \tag{11}$$

Pertanto, il momento d'inerzia rispetto a un asse passante per O è dato da:

$$I_{\mathrm{O}} = I_{\mathrm{CM}} + M \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} M d^2 + M \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M d^2. \tag{12}$$

Il momento d'inerzia della particella di massa m, rispetto a un asse passante per O, è dato da $I_{\text{part}} = md^2$. Allora il momento d'inerzia del sistema vale:

$$I_{\text{TOT}} = I_{\text{O}} + I_{\text{part}} = \frac{1}{3}Md^2 + md^2 = \frac{1}{3}1.2 \cdot 0.1^2 + 0.85 \cdot 0.1^2 \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 1.25 \cdot 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2. \tag{13}$$

L'energia cinetica rotazionale del sistema è data da:

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{TOT}} \omega^2 = \frac{1}{2} 1.25 \cdot 10^{-2} \cdot 0.5^2 \text{J} = 1.56 \cdot 10^{-3} \text{J}. \tag{14}$$

3) Nell'ipotesi di trattare l'acqua come fluido ideale, per il sistema in questione valgono l'equazione di continuità e quella di Bernoulli:

$$A \cdot v_A = B \cdot v_B \tag{15}$$

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \tag{16}$$

Dalla prima equazione ricaviamo che

$$v_A = \frac{B}{A} \cdot v_B, \tag{17}$$

che, sostituito nella seconda equazione, fa sì che:

$$p_A - p_B = \frac{\rho \cdot v_B^2}{2} \left[1 - \left(\frac{B}{A} \right)^2 \right]. \tag{18}$$

Risolvendo per v_B si ottiene:

$$v_B = A \sqrt{\frac{2 \cdot (p_A - p_B)}{\rho (A^2 - B^2)}} = 200 \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^3}{10^3 (4 \cdot 10^4 - 10^{-2})}} \text{m/s} = 3.16 \text{m/s}. \tag{19}$$

Dall'Eq. (17) si ricava inoltre che la velocità dell'acqua in corrispondenza alla sezione A vale:

$$v_A = \frac{B}{A} \cdot v_B = \frac{10^{-1}}{200} \cdot 3.16 \text{m/s} = 1.58 \cdot 10^{-3} \text{m/s}, \tag{20}$$

La portata volumica del tubo è pari a:

$$R_v = A \cdot v_A = B \cdot v_B = 10^{-1} \cdot 3.16 \text{m}^3/\text{s} = 3.16 \cdot 10^{-1} \text{m}^3/\text{s}, \tag{21}$$

mentre la portata massica è data da:

$$R_m = \rho \cdot R_v = 10^3 \cdot 3.16 \cdot 10^{-1} \text{kg/s} = 3.16 \cdot 10^2 \text{kg/s}, \tag{22}$$

SOLUZIONI DEI QUESITI

1) La potenza meccanica descrive la rapidità con cui viene sviluppata una certa quantità di lavoro nell'unità di tempo, vale a dire P= dL/dt. Nel sistema internazionale la potenza si misura in Watt, ossia J/s. Un'altra unità di misura particolarmente usata è data dai cavalli vapore (CV). La potenza, essendo definita come rapporto di due grandezze scalari, è una grandezza scalare.

2) Si definisce urto la collisione tra due o più corpi. In un urto perfettamente elastico si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica, mentre in un urto anelastico si conserva solo la quantità di moto. Se l'urto è perfettamente anelastico, dopo l'urto i due corpi proseguono uniti, caratterizzati dalla stessa velocità. Nell'ipotesi che l'urto coinvolga solo due corpi, le leggi di conservazione per l'urto perfettamente elastico sono:

$$m_1\mathbf{v_{1i}} + m_2\mathbf{v_{2i}} = m_1\mathbf{v_{1f}} + m_2\mathbf{v_{2f}} \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2, \tag{24}$$

dove la prima delle due equazioni è in generale di natura vettoriale, mentre la seconda è puramente scalare. Nel caso di urto perfettamente anelastico, la conservazione della quantità di moto è data da:

$$m_1\mathbf{v_{1i}} + m_2\mathbf{v_{2i}} = (m_1 + m_2)\mathbf{v_f} \tag{25}$$

3) Le grandezze fisiche da considerare per stabilire se un corpo si trova in condizione di equilibrio sono la quantità di moto e il momento angolare. Se entrambi sono costanti, il corpo si dice in equilibrio. Se sono nulli, allora si parla di equilibrio statico. Un libro appoggiato sul piano del tavolo si trova in posizione di equilibrio statico, mentre una lumaca che si muove a velocità costante è semplicemente in posizione di equilibrio.