PROVA PARZIALE DEL 23 FEBBRAIO 2017
modulo I

July 9, 2017

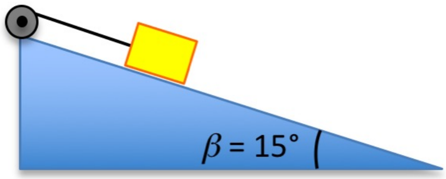
Si prega di svolgere nella maniera più chiara possibile il compito, di scrivere e risolvere le equazioni in gioco riportando tutti i passaggi e corredandoli di commenti. Riportare solo la formula finale o il risultato numerico corretto non verranno considerati sufficienti.

PROBLEMA 1)
Durante una partita di calcio a 11, un centrocampista calcia il pallone da terra a una velocità di 20 m/s con un angolo di 45 gradi rispetto al piano orizzontale. Un difensore della squadra avversaria, che si trova a 50 m di distanza da lui, gli corre incontro per intercettare il pallone. Trascurando la resistenza dell'aria, si calcolino: a) per quanto tempo il pallone resterà in volo, b) a che distanza dal centrocampista il pallone cadrà a terra, c) che velocità media dovrà mantenere il difensore per raggiungere il pallone nel momento in cui cadrà a terra. Se un altro giocatore, posto a distanza $d = 38$ m dal centrocampista, salta da fermo, fino a un'altezza di 2.1 m per intercettare il pallone di testa riuscirà nel suo scopo? A che altezza dalla sua testa sarà il pallone?

PROBLEMA 2)
Una sferetta di massa pari a 300 grammi viene fatta cadere su una piattaforma elastica avente costante di elasticità $k = 2.5$ N/cm. La sferetta resta appoggiata sulla piattaforma, che si comprime di 12 cm prima di arrestarsi momentaneamente. Quale lavoro svolge la forza di gravità durante la compressione della molla? Quale lavoro svolge la forza elastica? Si specifichi se il lavoro di ciascuna forza è positivo o negativo. In assenza di forze d'attrito, qual era la velocità della sferetta prima di toccare la piattaforma? Raddoppiando la velocità dell'impatto, quanto vale la massima compressione della piattaforma? Se invece raddoppia la massa della sferetta, quanto vale la massima compressione della piattaforma?

PROBLEMA 3)
Una fune con massa trascurabile è avvolta intorno a una puleggia di raggio

0.2 m al fine di accompagnare una cassa piena di legna, di massa 10 kg, nella sua discesa giù per un piano inclinato di 15 gradi rispetto all'orizzontale. Se



la cassa scende con un'accelerazione costante di 2 m/s^2, si determinino a) la tensione della fune, b) l'accelerazione angolare della puleggia, c) il momento d'inerzia della puleggia intorno al suo asse di rotazione.

QUESITI

1) Cos'è il centro di massa di un sistema? Si determini il centro di massa di un sistema composto da tre masse identiche m poste ai tre vertici di un triangolo equilatero di lato l. È possibile che il centro di massa di un sistema sia esterno al sistema stesso? Se sì, si faccia un esempio.

2) Si enuncino le tre leggi di Keplero. Dati due satelliti, se il primo si muove su un'orbita circolare e il secondo su un'orbita circolare più grande, quale satellite possiede il periodo più lungo? Quale la velocità maggiore?

3) Si enunci l'equazione di Bernoulli. A quale tipo di fluido si applica? Quale legge di conservazione esprime?

SOLUZIONI DEI PROBLEMI

1) Dopo essere stata colpito, il pallone da calcio compie una traiettoria di tipo parabolico. Scomponendo il suo moto lungo gli assi x e y, le equazioni del moto sono:

$$x = v_{0x} \cdot t \tag{1}$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2. \tag{2}$$

Dalla seconda equazione, ponendo y e y_0 uguali a zero (all'inizio e alla fine del moto il pallone è a terra), è possibile ricavare il tempo impiegato dalla palla per percorrere la traiettoria:

$$0 = t(v_{0y} - \frac{g \cdot t}{2}). \tag{3}$$

Questa equazione ammette due soluzioni. La prima è $t = 0$, mentre la seconda, utile ai fini di quanto richiesto, è:

$$t = \frac{2 \cdot v_{0y}}{g} = \frac{2 \cdot 20 \sin 45}{9.8} \mathrm{s} = 2.89 \mathrm{s}. \tag{4}$$

Sostituendo questo valore nell'equazione (1), si ricava che il pallone cadrà a terra a una distanza di:

$$x = v_{0x} \cdot t = 20 \cdot \cos 45 \cdot 2.89\text{m} = 40.87\text{m}. \tag{5}$$

Il difensore che si trova a 50 m da chi ha lanciato il pallone dovrà pertanto percorrere una distanza di $d = 50 - 40.87$ m $= 9.13$ m per raggiungere il pallone. Al fine di arrivare alla palla nel momento in cui questa toccherà terra, la velocità media che dovrà mantenere è pari a:

$$v_{\text{d}} = \frac{d}{t} = \frac{9.13}{2.89}\text{m/s} = 3.16\text{m/s}. \tag{6}$$

Per risolvere la seconda parte del problema reimpostiamo le due equazioni di partenza, in cui questa volta il dato noto è rappresentato dalla distanza orizzontale x' a cui si trova il giocatore che salta. Pertanto dall'equazione (1) si ottiene che il tempo t' in cui il pallone passerà all'altezza di tale giocatore è dato da:

$$t' = \frac{x'}{v_{0x}} = \frac{38}{20 \cdot \cos 45}\text{s} = 2.69\text{s}. \tag{7}$$

Dall'equazione (2) si ricava che l'altezza del pallone a questo tempo t' sarà:

$$y' = y_0 + v_{0y} \cdot t' - \frac{1}{2}g \cdot t'^2 = 0 + 20 \cdot \sin 45 \cdot 2.69 - \frac{1}{2}9.8 \cdot 2.69^2\text{m} = 2.59\text{m}. \tag{8}$$

Pertanto, la palla arriverà in prossimità del giocatore che salta ad un'altezza di 2.59 m dal suolo e quindi ad un'altezza $y'' = 2.59 - 2.1\text{m} = 0.49$ m $=$ 49 cm sopra la testa del giocatore, che di conseguenza non riuscirà nel suo intento.

2) Il lavoro svolto dalla forza di gravità durante la compressione della molla è dato da:

$$L_g = mg \cdot \Delta x = 0.3 \cdot 9.8 \cdot 0.12\text{J} = 0.35\text{J}. \tag{9}$$

Tale lavoro risulta positivo perchè sia la forza che lo spostamento sono diretti verso il basso. Viceversa, il lavoro svolto dalla forza elastica è negativo perchè la forza elastica agisce in verso opposto al fine di riportare la molla nella condizione di equilibrio. Il lavoro della forza elastica è dato da:

$$L_{\text{el}} = \frac{1}{2}k \cdot \Delta x^2 = \frac{1}{2}250 \cdot 0.12^2\text{J} = 1.8\text{J}. \tag{10}$$

Per trovare la velocità della sferetta prima dell'impatto bisogna considerare che, in assenza di forze d'attrito, l'energia cinetica della sferetta viene completamente convertita in forza elastica. Pertanto si ha:

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 = \frac{1}{2}k \cdot \Delta x^2, \tag{11}$$

che, risolta per v, dà:

$$v = \sqrt{\frac{k \cdot \Delta x^2}{m}} = \sqrt{\frac{250 \cdot 0.12^2}{0.3}}\mathrm{m/s} = 3.46\mathrm{m/s}. \tag{12}$$

Utilizzando la stessa relazione, se la velocità fosse doppia, la massima compressione varrebbe:

$$\Delta x' = \sqrt{\frac{m \cdot v'^2}{k}} = \sqrt{\frac{0.3 \cdot (2 \cdot 3.46)^2}{250}}\mathrm{m} = 0.24\mathrm{m}. \tag{13}$$

Infine, raddoppiando la massa della sferetta, la massima compressione diventerebbe:

$$\Delta x'' = \sqrt{\frac{m' \cdot v^2}{k}} = \sqrt{\frac{0.3 \cdot 2 \cdot 3.46^2}{250}}\mathrm{m} = 0.17\mathrm{m}. \tag{14}$$

3) Dato che la cassa scende lungo il piano inclinato con accelerazione a, la seconda legge di Newton è data da:

$$ma = mg \sin\beta - T, \tag{15}$$

dove T è la tensione della fune. Risolvendo per T si ottiene

$$T = mg \sin\beta - ma = 10 \cdot (9.8 \sin 15 - 2)\mathrm{N} = 5.36\mathrm{N}. \tag{16}$$

Dato che la puleggia e la cassa sono collegate tra loro da una fune inestensibile e priva di massa, l'accelerazione della cassa è uguale a quella tangenziale della puleggia. L'accelerazione angolare di quest'ultima è pertanto data da $\alpha = \mathrm{a/r} = 2/0.2 = 10\ \mathrm{rad/s^2}$, in cui r è il raggio della puleggia.
Per calcolare il momento d'inerzia della puleggia intorno al suo asse di rotazione occorre applicare la seconda legge di Newton nel caso di moto rotazionale $\tau = I \cdot \alpha$. Nel problema in esame l'unica forza che dà vita a un momento torcente è la tensione della fune, il cui punto di applicazione si trova a distanza r dall'asse di rotazione. Pertanto:

$$\tau = I \cdot \alpha = T \cdot r, \tag{17}$$

da cui si ricava

$$I = \frac{T \cdot r}{\alpha} = \frac{5.36 \cdot 0.2}{10}\mathrm{kg \cdot m^2} = 0.11\mathrm{kg \cdot m^2}. \tag{18}$$