PROVA PARZIALE DEL 25 GENNAIO 2017
modulo I

January 31, 2017

Si prega di svolgere nella maniera più chiara possibile il compito, di scrivere e risolvere le equazioni in gioco riportando tutti i passaggi e corredandoli di commenti. Riportare solo la formula finale o il risultato numerico corretto non verranno considerati sufficienti.

PROBLEMA 1)
Durante una partita di tennis, una tennista serve la palla da un'altezza di 2.3 m con una velocità orizzontale di 24 m/s. Se la rete è alta 0.9 m e si trova a una distanza di 12 m dalla tennista, la palla riuscirà a oltrepassarla? In caso affermativo, si dica a quale altezza rispetto al terreno e a quale altezza rispetto alla sommità della rete passerà la palla. Nel caso in cui, invece, la palla venga servita con una velocità iniziale di 24 m/s inclinata di 5 gradi rispetto all'orizzontale, si dica se la palla riuscirà a superare la rete. Anche in questo caso si dica a che altezza arriverà la palla rispetto al terreno e alla sommità della rete.

PROBLEMA 2)
Una boccia cava, il cui momento d'inerzia vale $I = 2/3MR^2 = 0.05$ kg $\cdot$ m^2 calcolato rispetto a un diametro e in cui $R = 15$ cm, rotola senza strisciare su per un piano inclinato di 30 gradi rispetto al piano orizzontale. Se alla base del piano inclinato la sua energia cinetica vale K = 20 J, si calcoli quale percentuale di questa energia è di tipo rotazionale. Si trovi inoltre quanto vale la velocità del centro di massa sempre alla base del piano inclinato. Quanto valgono energia cinetica totale e velocità del centro di massa dopo che la boccia è salita lungo il piano inclinato percorrendo una distanza di 1 m?

PROBLEMA 3)
In una galassia limitrofa alla nostra viene rinvenuto un pianeta privo di atmosfera di massa pari a $M = 5 \cdot 10^{23}$ kg e raggio $R = 3 \cdot 10^6$ m. Se una sonda di massa 10 kg viene lanciata verticalmente dalla superficie del pianeta con un'energia cinetica iniziale di $5 \cdot 10^7$ J, quanto varrà l'energia cinetica della

sonda quando questa si troverà a $4 \cdot 10^6$ m dal centro del pianeta? Se la distanza massima che la sonda deve raggiungere è pari a $8 \cdot 10^6$ m, con quale energia cinetica dovrà essere lanciata dalla superficie del pianeta?

QUESITI

1) Cos'è la forza d'attrito? Che differenza c'è tra la forza di attrito statico e quella di attrito dinamico? Se a una cassa appoggiata sul pavimento viene applicata una forza orizzontale di 10 N e questa non si muove, quanto vale la forza di attrito statico? Se la forza di attrito statico ha come valore massimo 20 N, la cassa si muove applicandole 16 N? Quanto vale in tal caso la forza di attrito?

2) Cos'è una forza conservativa? Di che proprietà gode il lavoro di una forza conservativa? Si faccia un esempio di forza conservativa e uno di forza non conservativa.

3) Quali sono le caratteristiche di un fluido ideale? Se in un tubo orizzontale di sezione variabile scorre un fluido ideale, quale sarà il rapporto tra la velocità in ingresso e quella in uscita rispetto al rapporto delle corrispondenti sezioni?

SOLUZIONI DEI PROBLEMI

1) Dopo essere stata colpita la palla da tennis compie una traiettoria di tipo parabolico. Scomponendo il suo moto lungo gli assi x e y, le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned} x &= v_{0x} \cdot t & (1) \\ y &= y_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2. & (2) \end{aligned}$$

Dalla prima equazione è possibile ricavare il tempo impiegato dalla palla per percorrere uno spazio orizzontale di 12 m:

$$t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{12}{24}\text{s} = 0.5\text{s}. \quad (3)$$

Sostituendo questo valore nella seconda equazione, si ricava che:

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 2.3 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 0.5^2\text{m} = 1.08\text{m}. \quad (4)$$

Pertanto, la palla arriverà in prossimità della rete ad un'altezza di 1.08 m dal suolo e quindi ad un'altezza $y' = 1.08 - 0.9\text{m} = 0.18$ m $= 18$ cm sopra la sommità della rete.

Nel caso in cui la velocità iniziale con cui la palla viene colpita sia inclinata di 5 gradi verso il basso, occorre innanzitutto scomporre tale velocità lungo gli assi x e y:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cdot \cos\alpha = (24 \cdot \cos 5)\text{m/s} = 23.91\text{m/s} & (5) \\ v_{0y} &= -v_0 \cdot \sin\alpha = (24 \cdot \sin 5)\text{m/s} = -2.09\text{m/s}, & (6) \end{aligned}$$

dove il segno meno nella seconda equazione indica che la componente v_{0y} è diretta verso il basso. In questo caso le equazioni del moto diventano:

$$x = v_{0x} \cdot t \quad (7)$$
$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2. \quad (8)$$

Dalla prima equazione si ricava che il tempo di volo per raggiungere la rete è:

$$t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{12}{23.91}\text{s} = 0.50\text{s}. \quad (9)$$

L'altezza della palla dal suolo sarà:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 2.3 - 2.09 \cdot 0.50 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 0.5^2\text{m} = 0.03\text{m} = 3\text{cm}. \quad (10)$$

Questo significa che la palla non riuscirà a superare la rete. In particolare, rispetto alla sommità della rete, la palla arriverà ad un'altezza $y'' = 0.03 - 0.9$m = - 0.87 m = - 87 cm, dove il segno meno indica che la palla si trova al di sotto e non al di sopra della sommità della rete.

2) Se la boccia rotola senza strisciare, la sua energia cinetica è data dalla somma del contributo traslazionale e di quello rotazionale:

$$K = \frac{1}{2} M \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2. \quad (11)$$

Tenendo conto che $v = \omega \cdot R$, e sostituendo $I = 2/3 M R^2$ nella definizione di K, si ottiene che:

$$K = \frac{1}{2} M \cdot v^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3} M \cdot v^2 = \frac{5}{6} M \cdot v^2 = \frac{5}{6}\frac{3}{2}\frac{I \cdot v^2}{R^2}, \quad (12)$$

in cui si è nuovamente utilizzata l'espressione del momento d'inerzia della boccia cava per ricavare M.
La velocità del centro di massa si ottiene invertendo l'equazione:

$$v = \sqrt{\frac{12 \cdot K \cdot R^2}{15 \cdot I}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 20 \cdot 0.15^2}{15 \cdot 0.05}}\text{m/s} = 2.68\text{m/s}. \quad (13)$$

L'energia cinetica rotazionale è pari a $K_{\text{ROT}} = (1/2) I \cdot \omega^2 = (1/2) I \cdot v^2/R^2 = 0.5 \cdot 0.05 \cdot 2.68^2/0.15^2\text{J} = 8$ J. Rapportata all'energia cinetica totale, essa è 8J/20J = 0.4 = 40 % del totale.
Dato che la boccia rotola su per il piano inclinato, dopo aver percorso 1 m si trova ad un'altezza dal suolo pari a $h = l \sin\alpha = 1 \sin 30\text{m} = 0.5$ m.
Nota l'energia iniziale (solo cinetica) e applicando la conservazione dell'energia, è possibile calcolare l'energia cinetica all'altezza $h = 0.5$ m:

$$K_{\text{fin}} = K_{\text{in}} - Mgh = K_{\text{in}} - \frac{3I}{2R^2} \cdot gh = (20 - \frac{3 \cdot 0.05}{2 \cdot 0.15^2} \cdot 9.8 \cdot 0.5)\text{J} = 3.67\text{J}. \quad (14)$$

Ad $h = 0.5$m la velocità del centro di massa vale:

$$v = \sqrt{\frac{12 \cdot K \cdot R^2}{15 \cdot I}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 3.67 \cdot 0.15^2}{15 \cdot 0.05}} \text{m/s} = 1.15 \text{m/s}. \tag{15}$$

3) Per trovare l'energia cinetica della sonda alla distanza $d = 4 \cdot 10^6$ m dal centro del pianeta, bisogna tener presente che il sistema è isolato e pertanto l'energia totale si conserva. Sia al momento del lancio che alla distanza d l'energia della sonda sarà data dalla somma di energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale:

$$K_{\text{in}} + U_{\text{in}} = K_{\text{fin}} + U_{\text{fin}}, \tag{16}$$

in cui $U = -(G \cdot mM)/(r)$. Da questa equazione si può pertanto ricavare K_{fin}:

$$K_{\text{fin}} = K_{\text{in}} + U_{\text{in}} - U_{\text{fin}} = K_{\text{in}} - G \cdot mM \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d}\right), \tag{17}$$

in cui R è il raggio del pianeta. Sostituendo i valori numerici si ottiene che

$$\begin{aligned} K_{\text{fin}} &= 5 \cdot 10^7 - 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{23} \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 10^6} - \frac{1}{4 \cdot 10^6}\right) \text{J} = \\ &= 5 \cdot 10^7 \left(1 - \frac{6.67}{12}\right) \text{J} = 2.22 \cdot 10^7 \text{J}. \end{aligned} \tag{18}$$

A distanza $d' = 8 \cdot 10^6$ l'energia cinetica della sonda è nulla, per cui la conservazione dell'energia in questo caso sarà:

$$K'_{\text{in}} + U_{\text{in}} = 0 + U_{\text{fin}}, \tag{19}$$

in cui $r_{\text{in}} = R$, mentre $r_{\text{fin}} = d'$. L'energia cinetica iniziale che la sonda deve possedere per raggiungere la distanza d' pertanto vale:

$$\begin{aligned} K'_{\text{in}} &= U_{\text{fin}} - U_{\text{in}} = -G \cdot mM \cdot \left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{R}\right) = \qquad (20) \\ &= -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{23} \cdot \left(\frac{1}{8 \cdot 10^6} - \frac{1}{3 \cdot 10^6}\right) \text{J} = 6.9 \cdot 10^7 \text{J}. \end{aligned}$$

SOLUZIONI DEI QUESITI

1) La forza di attrito è la forza che si oppone allo scivolamento di un corpo su una superficie. Si distingue in forza di attrito statico e forza di attrito dinamico a seconda che il corpo in questione si trovi inizialmente fermo sulla superficie o già in moto. Se a una cassa appoggiata sul pavimento viene applicata una forza orizzontale di 10 N e questa non si muove, la forza di

attrito è di tipo statico e vale 10 N. Se la forza di attrito statico ha come valore massimo 20 N, applicando una forza di 16 N la cassa non si muove. In questo caso la forza di attrito vale 16 N.
2) Una forza si dice conservativa se il lavoro della forza stessa, applicata ad un corpo per portarlo da una posizione iniziale ad una finale, non dipende dal cammino seguito. In caso di forza conservativa, il lavoro della forza lungo un percorso chiuso è nullo. Inoltre, se la forza è di tipo conservativo, è possibile associarle una forma di energia potenziale. La forza gravitazionale è conservativa, mentre quella di attrito non è conservativa.
3) Un fluido si dice ideale se valgono le seguenti 4 proprietà: il suo flusso è laminare, il fluido è incomprimibile, non viscoso e irrotazionale.
Per un fluido ideale vale l'equazione di continuità, secondo cui, dato un tubo orizzontale di sezione variabile A, il legame tra velocità v e sezioni è il seguente:

$$v_{\rm in}/v_{\rm out} = A_{\rm out}/A_{\rm in}. \tag{21}$$