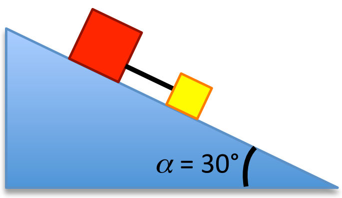
PROVA PARZIALE DEL 27 GENNAIO 2016

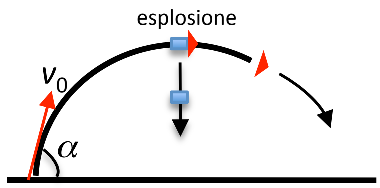
February 2, 2016

Si prega di commentare e spiegare bene i vari passaggi, non di riportare solo la formula finale.

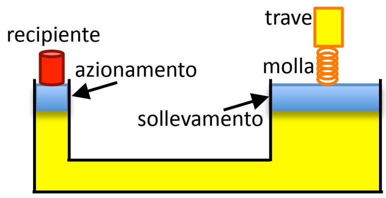
PROBLEMA 1)
Due blocchi, collegati da uno spago privo di massa, scivolano giù per un piano inclinato di 30 gradi. Il loro peso è rispettivamente di 3.6 e 7.2 N, mentre il coefficiente di attrito dinamico vale 0.1 per il blocco più leggero e 0.2 per quello più pesante. Nell'ipotesi che il blocco più leggero stia in testa, (a) disegnate il diagramma delle forze agenti su ciascun blocco, (b) trovate l'accelerazione dei blocchi e (c) calcolate la tensione dello spago.



PROBLEMA 2)
Un cannone spara una granata con una velocità pari a 10 m/s ed un angolo $\alpha = 60$ gradi sopra il piano orizzontale. Al vertice della traiettoria la granata esplode, rompendosi in due frammenti di uguale massa. Uno dei due, immediatamente dopo l'esplosione, ha velocità nulla e cade verticalmente.
(a) Quanto vale il vertice della traiettoria? (b) A che distanza dal cannone atterrerà l'altro frammento, ammettendo che il terreno sia piano e la resistenza dell'aria trascurabile? (c) Per quanto tempo sarà in volo?



PROBLEMA 3)
Una molla avente costante elastica $k = 3 \cdot 10^4$ N/m è frapposta fra il pistone di sollevamento di un martinetto idraulico e una trave di carico. Sul pistone di azionamento è appoggiato un recipiente di massa trascurabile. L'area del pistone di azionamento è A, mentre quello di sollevamento ha area $18A$. Nello stato iniziale la molla è a riposo. Per comprimere la molla di 5 cm, quanti chilogrammi di sabbia occorre caricare nel recipiente?



QUESITI
1) Si enunci il teorema dell'energia cinetica. Se una particella si muove lungo l'asse x e la sua velocità varia da -3 m/s a -2 m/s, la sua energia cinetica aumenta, diminuisce o resta invariata? Il lavoro compiuto sulla particella è positivo, negativo o nullo?
2) Si dia la definizione di corpo rigido. Com'è definito il momento d'inerzia di un corpo rigido rotante rispetto ad un asse fisso nel caso di sistema discreto? E per un corpo in cui la massa sia distribuita con continuità?
3) Si enunci il principio di Archimede.

SOLUZIONI DEI PROBLEMI
1) Innanzitutto notiamo che sui due blocchi, lungo il piano inclinato, agiscono la componente lungo il piano della forza peso ($mg \sin\alpha$), la tensione dello spago (T) e la forza di attrito ($\mu_k mg \cos\alpha$). Lungo la direzione ortogonale al piano entrambi i blocchi sono in equilibrio in quanto la componente

della forza peso ($mg\cos\alpha$) è controbilanciata dalla normale al piano (F_N). I due blocchi sono collegati da uno spago inestensibile e privo di massa e pertanto costituiscono un solo sistema, caratterizzato da un'unica accelerazione. Per calcolare tale accelerazione, scriviamo la seconda legge di Newton lungo il piano per ciascuno dei due blocchi, assumendo che m_1 sia più leggero di m_2:

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - T - \mu_{\mathrm{k}1} m_1 g \cos\alpha \quad (1)$$

$$m_2 a = m_2 g \sin\alpha + T - \mu_{\mathrm{k}2} m_2 g \cos\alpha \quad (2)$$

dove $\mu_{\mathrm{k}1}$ e $\mu_{\mathrm{k}2}$ sono i coefficienti di attrito dinamico rispettivamente per i corpi 1 e 2. Dall'equazione (2) è possibile ottenere l'espressione per la tensione (altra incognita del problema):

$$T = m_2 a - m_2 g \sin\alpha + \mu_{\mathrm{k}2} m_2 g \cos\alpha \quad (3)$$

Sostituendo quest'ultima nella (1) si ottiene:

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - m_2 a + m_2 g \sin\alpha - \mu_{\mathrm{k}2} m_2 g \cos\alpha - \mu_{\mathrm{k}1} m_1 g \cos\alpha$$

da cui, spostando nel membro di sinistra i termini contenenti a, si ricava:

$$(m_1 + m_2) a = (m_1 + m_2) g \sin\alpha - (\mu_{\mathrm{k}2} m_2 + \mu_{\mathrm{k}1} m_1) g \cos\alpha$$

per cui a risulta essere:

$$\begin{aligned} a &= g\sin\alpha - \frac{(\mu_{\mathrm{k}2} m_2 + \mu_{\mathrm{k}1} m_1)}{(m_1 + m_2)} g\cos\alpha = \\ &= 9.8 \cdot 0.5 - \frac{0.1 \cdot 3.6 + 0.2 \cdot 7.2}{3.6 + 7.2} 9.8 \cdot 0.87 \mathrm{m/s^2} = 3.48 \mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

In base alla convenzione sul segno usata nelle equazioni (1) e (2), un'accelerazione positiva ci dice che i due blocchi scendono lungo il piano inclinato. Infine, sostituendo il risultato per a in (3), si ottiene:

$$T = 7.2 \cdot \frac{3.48}{9.8} - 7.2 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 7.2 \cdot 0.87 \mathrm{N} = 0.21 \mathrm{N}$$

2) Nel primo tratto della traiettoria, la granata si muove di moto parabolico, scomponibile lungo gli assi orizzontale e verticale come segue:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \quad (4)$$

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - 1/2 g t^2 \quad (5)$$

All'apice della traiettoria la componente verticale della velocità, data da $v = v_0 \sin\alpha - gt$, è nulla per cui:

$$t = v_0 \sin\alpha/g = 10 \cdot 0.87/9.8\text{s} = 0.88\text{s}$$

Sostituendo il tempo nelle equazioni (4) e (5), si ottengono le coordinate dell'apice:

$$\begin{aligned} x_{\text{MAX}} &= 10 \cdot 0.5 \cdot 0.88\text{m} = 4.4\text{m} \\ y_{\text{MAX}} &= 10 \cdot 0.87 \cdot 0.88 - 0.5 \cdot 9.8 \cdot 0.88^2\text{m} = 3.87\text{m} \end{aligned}$$

Quando la granata si spezza in due frammenti, essendo il sistema isolato, vale il principio di conservazione della quantità di moto. All'apice della traiettoria, la sola componente della velocità posseduta dalla granata è quella orizzontale, mentre il primo frammento ha velocità nulla (sia orizzontale che verticale). Pertanto, all'atto della rottura, il secondo frammento possiede solo la componente orizzontale della velocità:

$$2mv_0 \cos\alpha = m \cdot 0 + m \cdot v_2$$

da cui si ricava che $v_2 = v_0$. Il moto del secondo frammento, di tipo parabolico, è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t' \qquad (6) \\ y &= y_0 - 1/2gt'^2 \qquad (7) \end{aligned}$$

in cui $y_0 = 3.87$ m. Dall'equazione (7), ponendo $y = 0$ (il secondo frammento arriva a terra), si ricava

$$t' = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3.87}{9.8}}\text{s} = 0.88\text{s} \qquad (8)$$

che, sostituito nella (6), permette di ottenere:

$$x_2 = 10 \cdot 0.88m = 8.8m$$

Pertanto il secondo frammento cade ad una distanza dal cannone pari a:

$$x_{\text{TOT}} = x_{\text{MAX}} + x_2 = 4.4 + 8.8\text{m} = 13.2\text{m}$$

mentre il tempo per cui sta in volo è pari a:

$$t_{\text{TOT}} = t + t' = 0.88 + 0.88\text{s} = 1.76\text{s}$$

Del resto, dal momento che la resistenza dell'aria è trascurabile, il tempo di salita e quello di discesa non dipendono dalla massa, ma solo dalla quota.

3) Il torchio idraulico descritto nel problema è una tipica applicazione del principio di Pascal. La variazione di pressione applicata al pistone di azionamento dalla sabbia versata è la stessa che spinge il pistone di sollevamento e che quindi determina la compressione della molla (dal momento che la trave non si muove). Pertanto, applicando il principio di Pascal, si ha:

$$\Delta p = \frac{F_1}{A} = \frac{F_2}{18 \cdot A} \tag{9}$$

dove F_1 é il peso della sabbia, per cui $F_1 = mg$, mentre $F_2 = kx$, in base ala legge di Hooke. Sostituendo nella (9), si ottiene:

$$\frac{mg}{A} = \frac{kx}{18 \cdot A}$$

che risolta per m dà:

$$m = \frac{kx}{18 \cdot g} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{18 \cdot 9.8}\text{kg} = 8.5\text{kg}$$

SOLUZIONI DEI QUESITI

1) Il teorema dell'energia cinetica afferma che il lavoro svolto su un corpo da una forza esterna è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo stesso. Se una particella si muove lungo l'asse x e la sua velocità varia da -3 m/s a -2 m/s, la sua energia cinetica diminuisce e quindi, in base al teorema dell'energia cinetica, il lavoro è negativo.

2) Il corpo rigido é un sistema di punti materiali in cui la distanza relativa tra gli elementi di massa costituenti il corpo stesso non varia nel tempo e non subisce deformazioni, nè per effetto di una traslazione nè per effetto di una rotazione.

Il momento d'inerzia di un corpo rigido rotante rispetto ad un asse fisso è definito come $I = \sum_i^N m_i \cdot r_i^2$ per un sistema discreto di N particelle, in cui m_i è la massa dell'i-esima particella e r_i la sua distanza dall'asse di rotazione. Se la massa del corpo è distribuita con continuità alla somma si sostituisce l'integrale: $I = \int r^2 dm$.

3) Il principio di Archimede afferma che un corpo, parzialmente o completamente immerso in un fluido, subisce una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato.