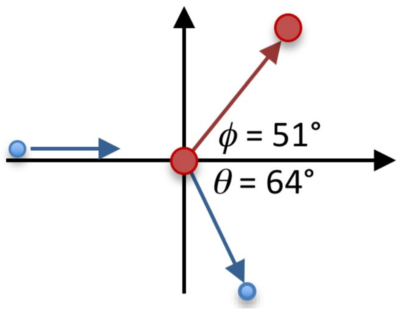
PROVA PARZIALE DEL 15 DICEMBRE 2017
modulo I

December 29, 2017

Si prega di svolgere nella maniera più chiara possibile il compito, di scrivere e risolvere le equazioni in gioco riportando tutti i passaggi e corredandoli di commenti. Riportare solo la formula finale o il risultato numerico corretto non verranno considerati sufficienti.

PROBLEMA 1)
Come indicato in figura, una particella α urta un nucleo di ossigeno inizialmente fermo. Dopo l'urto la particella α viene deviata di un angolo $\theta = 64$ gradi, mentre il nucleo di ossigeno prosegue lungo una direzione formante un angolo $\phi = 51$ gradi rispetto all'asse x ad una velocità di $1.2 \cdot 10^5$ m/s. Nell'ipotesi che la massa della particella α sia di 4u (dove u è l'unità di massa atomica) e quella del nucleo di ossigeno di 16u, si calcolino la velocità iniziale e quella finale della particella α.



PROBLEMA 2)
Una ruota avente massa 10 kg e raggio 0.4 m rotola senza strisciare su un piano orizzontale sottoposta a una forza costante di 10 N che viene applicata nel suo centro di massa. Se l'accelerazione del centro di massa è pari a 0.6 m/s^2, quali sono l'intensità e la direzione della forza di attrito agente sulla ruota? Quanto vale il momento d'inerzia della ruota calcolato rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa? Nell'ipotesi che la ruota parta da ferma, quanto vale la sua energia cinetica dopo un tempo di 10 s?

PROBLEMA 3)
Si calcoli quanto deve valere l'area minima di una lastra di ghiaccio spessa 0.5 m necessaria a sorreggere un'automobile di massa 900 kg. Le densità del ghiaccio e dell'acqua sono rispettivamente di 917 kg/m^3 e di 998 kg/m^3.

QUESITI
1) Che differenza c'è tra grandezze fisiche scalari e vettoriali? Le seguenti grandezze fisiche sono scalari o vettori: massa, forza, pressione, accelerazione, momento angolare, quantità di moto, lavoro, energia?
2) Si dia la definizione di momento angolare per un sistema discreto di particelle e per un corpo rigido. Si esprima la seconda legge di Newton in termini di momento angolare. Qual è l'analoga espressione nel caso di moto di traslazione? Quale grandezza fisica viene in questo caso considerata?
3) La forza descritta dalla legge di gravitazione universale è conservativa? Se sì, si definisca il potenziale gravitazionale specificandone il segno.

SOLUZIONI DEI PROBLEMI
1) Per trovare la velocità iniziale e quella finale della particella α, occorre osservare che l'urto in questione si svolge nel piano. Pertanto, applicando la conservazione della quantità di moto lungo gli assi x e y si trova che:

$$m_\alpha v_{\alpha i} = m_O v_{Of} \cos\phi + m_\alpha v_{\alpha f} \cos\theta \quad (1)$$
$$0 = m_O v_{Of} \sin\phi - m_\alpha v_{\alpha f} \sin\theta. \quad (2)$$

Dalla seconda equazione si ricava immediatamente il valore di $v_{\alpha f}$, che risulta essere:

$$v_{\alpha f} = \frac{m_O v_{Of} \sin\phi}{m_\alpha \sin\theta} = \frac{16u \cdot 1.2 \cdot 10^5 \cdot \sin 51}{4u \cdot \sin 64}\text{m/s} = 4.15 \cdot 10^5\text{m/s}. \quad (3)$$

Sostituendo questo valore nella prima equazione, è infine possibile calcolare la velocità iniziale della particella α:

$$v_{\alpha i} = \frac{m_O v_{Of} \cos\phi + m_\alpha v_{\alpha f} \cos\theta}{m_\alpha} = \quad (4)$$
$$= \frac{16u \cdot 1.2 \cdot 10^5 \cdot \cos 51 + 4u \cdot 4.15 \cdot 10^5 \cdot \cos 64}{4u}\text{m/s} = 4.84 \cdot 10^5\text{m/s}.$$

Si noti che, sostituendo i valori delle velocità nell'espressione dell'energia cinetica, l'urto risulta essere non perfettamente elastico. Pertanto, l'energia cinetica non si conserva.

2) Se la ruota rotola senza strisciare, la forza di attrito coinvolta nel moto è di tipo statico e non dinamico. Valutando la seconda legge di Newton lungo l'asse x si trova che:

$$m \cdot a = F - f_{\rm s}, \quad (5)$$

in cui a è l'accelerazione del centro di massa, F la forza applicata dall'esterno e f_s la forza di attrito. Risolvendo per quest'ultima si trova che $f_\mathrm{s} = m \cdot a - F = (10 \cdot 0.6 - 10)\mathrm{N} = -4$ N. Il segno meno indica che la forza di attrito è diretta in verso opposto alla forza applicata.
Per il calcolo del momento d'inerzia occorre notare che, in assenza di informazioni sulla forma della ruota, conviene affidarsi alla seconda legge di Newton per i moti di rotazione:

$$\tau = I\alpha = f_\mathrm{s} \cdot R, \tag{6}$$

in cui notiamo che l'unica forza che produce un momento torcente è quella non applicata nel centro di massa della ruota, ossia la forza di attrito. Sapendo che l'accelerazione angolare α è legata a quella lineare del centro di massa da $\alpha = a/R$, in cui R è il raggio della ruota, si ricava che il momento d'inerzia I vale:

$$I = \frac{f_\mathrm{s} \cdot R^2}{a} = \frac{4 \cdot 0.4^2}{0.6} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 = 1.07 \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2. \tag{7}$$

L'energia cinetica della ruota che rotola è data dalla somma di due contributi, ossia quello traslazionale e quello rotazionale:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{8}$$

Per trovare i valori di v ed ω al tempo $t = 10$s, occorre applicare le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$\begin{aligned} v &= a \cdot t = 0.6 \cdot 10 \mathrm{m/s} = 6 \mathrm{m/s} && (9) \\ \omega &= \alpha \cdot t = a/R \cdot t = 0.6/0.4 \cdot 10 \mathrm{rad/s} = 15 \mathrm{rad/s}. && (10) \end{aligned}$$

L'energia cinetica totale vale pertanto:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 0.5 \cdot 10 \cdot 6^2 + 0.5 \cdot 1.07 \cdot 15^2 \mathrm{J} = 180 + 120.38 \mathrm{J} = 300.38 \mathrm{J}. \tag{11}$$

3) Per risolvere il problema occorre notare che la lastra di ghiaccio sarà in grado di sorreggere l'automobile solo nel caso in cui la forza peso sia controbilanciata dalla spinta idrostatica. Pertanto, all'equilibrio si ha:

$$m_\mathrm{au} \cdot g + m_\mathrm{gh} \cdot g = m_\mathrm{ac} \cdot g, \tag{12}$$

dove il pedice $_\mathrm{au}$ si riferisce all'auto, $_\mathrm{gh}$ alla lastra di ghiaccio e $_\mathrm{ac}$ all'acqua. Dato che viene chiesta l'area minima della lastra, siamo nella condizione in cui questa si trova completamente immersa a pelo d'acqua.

Ciò significa che il volume d'acqua spostato dalla lastra corrisponde esattamente al suo volume V_{gh}. Svolgendo l'equazione di cui sopra, si trova che:

$$m_{\mathrm{au}} + \rho_{\mathrm{gh}} \cdot V_{\mathrm{gh}} = \rho_{\mathrm{ac}} \cdot V_{\mathrm{gh}}. \tag{13}$$

Dato che $V_{\mathrm{gh}} = A_{\mathrm{gh}} \cdot d_{\mathrm{gh}}$, l'area minima A_{gh} della lastra risulta essere

$$A_{\mathrm{gh}} = \frac{m_{\mathrm{au}}}{d_{\mathrm{gh}}(\rho_{\mathrm{ac}} - \rho_{\mathrm{gh}})} = \frac{900}{0.5(998 - 917)}\mathrm{m}^2 = 22.22\mathrm{m}^2. \tag{14}$$