PROVA PARZIALE DEL 14 SETTEMBRE 2018
modulo I

September 28, 2018

Si prega di svolgere nella maniera più chiara possibile il compito, di scrivere e risolvere le equazioni in gioco riportando tutti i passaggi e corredandoli di commenti. Riportare solo la formula finale o il risultato numerico corretto non verranno considerati sufficienti.

PROBLEMA 1)
Un fucile è puntato orizzontalmente contro un bersaglio alla distanza di 30 m. Un proiettile sparato dal fucile colpisce il bersaglio ad una quota 1.9 cm sotto il centro.

1. Qual è il tempo di volo del proiettile?
2. Qual è la velocità del proiettile alla bocca del fucile?
3. Di quale angolo bisognerebbe ruotare il fucile affinché il proiettile colpisca il bersaglio esattamente nel centro? Si consideri la stessa velocità iniziale ricavata al punto 2.

Può essere utile la relazione trigonometrica $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$.

PROBLEMA 2)
Una sfera cava di raggio 0.15 m e momento d'inerzia 0.04 kg$\cdot$m^2 rispetto ad un diametro, rotola senza strisciare su per un piano inclinato di 30°. Nella posizione iniziale possiede un'energia cinetica totale di 20 J.

1. Che porzione di questa energia cinetica è rotazionale?
2. Qual è la velocità del centro di massa nella posizione iniziale?

Quali sono:

3. l'energia cinetica
4. la velocità del centro di massa

dopo che la sfera è salita percorrendo 1 m lungo il piano inclinato?
Il momento d'inerzia per una sfera cava di massa m e raggio r vale $I = \frac{2}{3}mr^2$.

PROBLEMA 3)
Un blocco di ferro, che contiene diverse cavità, pesa 6000 N in aria e 4000 N in acqua. Qual è il volume totale delle cavità contenute nel blocco? La densità del ferro (omogeneo, cioè senza cavità) è di 7.87 g/cm^3.

QUESITI
1) Si dia la definizione di quantità di moto e di energia cinetica per un corpo puntiforme. Si tratta di grandezze scalari o vettoriali? Quali sono le loro unità di misura nel Sistema Internazionale? Si descriva una situazione fisica in cui entrambe le quantità sono conservate.
2) Si dia la definizione di momento angolare per un sistema discreto di particelle e per un corpo rigido. Se una pattinatrice su ghiaccio che sta ruotando su se stessa vuole diminuire la propria velocità di rotazione, come deve disporre le braccia rispetto al corpo? Perchè?
3) Si dia la definizione di fluido ideale. Quali leggi di conservazione si applicano ai fluidi ideali? Si chiede che vengano scritte in termini di equazioni.

SOLUZIONE PROBLEMA 1)

1,2. Indicando con L la distanza del fucile dal bersaglio e con h la distanza del centro dal punto di impatto, si scrivono le equazioni del moto parabolico del proiettile:

$$\begin{cases} L = v_{0x} t_v \\ h = -\frac{1}{2} g t_v^2 \end{cases} . \tag{1}$$

Da queste si ricava:

$$t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.06 \text{ s}, \quad v_{0x} = \frac{L}{t_v} = 482 \text{ m/s} \tag{2}$$

3. Indicando con θ l'angolo di inclinazione del fucile rispetto all'asse orizzontale, si scrivono le componenti della velocità iniziale:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases} , \tag{3}$$

dove $v_0 = 482$ m/s è il suo modulo. In questo caso, le equazioni del moto del proiettile sono

$$\begin{cases} L = v_{0x} t_v \\ 0 = v_{0y} t_v - \frac{1}{2} g t_v^2 \end{cases} \tag{4}$$

Ricavando t_v dalla prima equazione, sostituendo nella seconda e usando le relazioni (3) si giunge a:

$$\sin(2\theta) = \frac{Lg}{v_0^2} \;\Rightarrow\; \theta = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{Lg}{v_0^2}\right) = 0.036^\circ \tag{5}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 2)

1. L'energia cinetica iniziale K_A della sfera è data dalla somma di energia cinetica traslazionale (dovuta al moto del centro di massa) e rotazionale (data dalla rotazione attorno al centro di massa):

$$K_A = K_{cm} + K_{rot} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2, \tag{6}$$

dove m è la massa della sfera e ω la frequenza angolare di rotazione. Siccome il moto avviene senza strisciamento, vale la relazione $v_{cm} = \omega r$; inoltre è possibile ricavare la massa a partire dalla formula per il momento d'inerzia: $m = \frac{3}{2} \frac{I}{r^2} = 2.67$ kg. Utilizzando queste due relazioni, dall'Eq. (6) si ricava il valore di ω:

$$\omega^2 = \frac{6K_A}{5mr^2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{20 \cdot 6}{5 \cdot 2.67 \cdot 0.15^2}} \text{ rad/s} = 20 \text{ rad/s} \tag{7}$$

L'energia cinetica rotazionale è data quindi da $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = 8$ J; la frazione rispetto al totale è $\frac{K_{rot}}{K_A} = \frac{8}{20} = 0.4$, cioè il 40%.

2. La velocità iniziale del centro di massa è data da $v_{cm} = \omega r = 20 \cdot 0.15$ m/s $= 3$ m/s.

3. La sfera raggiunge il punto B percorrendo $l = 1$ m in salita su un piano inclinato di $\theta = 30^\circ$, cioè guadagna $h = l \sin\theta = 0.5$ m di quota. Per la conservazione dell'energia si ha:

$$K_B = K_A - mgh = 6.92 \text{ J} \tag{8}$$

4. L'energia cinetica in B è anch'essa formata da una parte traslazionale e una rotazionale (con le stesse proporzioni rispetto alla posizione A, ma con valori assoluti differenti). Applicando lo stesso procedimento del punto 1., si giunge alla relazione

$$K_B = \frac{5}{6} m v_{cm,B}^2, \tag{9}$$

da cui si ottiene $v_{cm,B} = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{K_B}{m}} = 1.76$ m/s.

SOLUZIONE PROBLEMA 3)

Lo stesso campione pesa diversamente in acqua e in aria a causa della presenza della spinta di Archimede. In particolare:

$$\begin{cases} P_{aria} = mg = \rho_{Fe} V_{Fe} g \\ P_{H_2O} = mg - \rho_{H_2O} V_{imm} g \end{cases}, \tag{10}$$

dove il volume immerso comprende sia quello del ferro che quello delle cavità: $V_{imm} = V_{Fe} + V_{cav}$. Dalla prima delle due relazioni in (10) si ricava il volume del ferro: $V_{Fe} = \frac{P_{aria}}{\rho_{Fe} g} = 0.078$ m^3. Il modulo della spinta idrostatica si ricava invece come differenza di pesi:

$$\rho_{H_2O}(V_{Fe} + V_{cav})g = P_{aria} - P_{H_2O}, \tag{11}$$

da cui:

$$\Rightarrow \quad V_{cav} = \frac{P_{aria} - P_{H_2O}}{\rho_{H_2O} g} - V_{Fe} = 0.126 \text{ m}^3. \tag{12}$$